CURSO DE MACROECONOMIA AVANZADA

"CICLOS ECONOMICOS REALES"

CONTENIDO

Cada sección incluye algunos Problemas Seleccionados.

I. EL MODELO NEOCLASICO CON INCERTIDUMBRE

Incorporando incertidumbre al modelo de crecimiento neoclásico:

- Choques tecnológicos

$$Y_t = \theta_t F(K_t, L_t)$$

  en donde θ_t es una variable aleatoria (o proceso estocástico)

- Choques de preferencias (i.e.: β_t factor de descuento aleatorio)

- Choques de política (i.e.: g_t o M_t aleatorios)

La incertidumbre afecta el comportamiento de los consumidores:

- Los agentes conocen las realizaciones presente y pasadas de los choques, pero no las realizaciones futuras

- Sin embargo, conocen el proceso estocástico que genera estas realizaciones futuras

- Los agentes escogen planes contingentes (que dependen de las posibles realizaciones del proceso estocástico) para cada variable

- Objectivo: maximizar la utilidad esperada

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

Notación

- z : variable aleatoria (choque)
- Z : conjunto del cual z se extrae cada período
- $z_t \in Z$: realización del shock en el período t
- $z^t = (z_0, z_1, z_2, ...z_t)$: historia de realizaciones del shock hasta el período t
- $Z^t \Big| z^{t-s}$: conjunto de todas las posibles historias hasta el período t que empiezan con z^{t-s}

Si $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ es finito, z es una variable aleatoria discreta. Entonces:

- $\pi(z_t)$: probabilidad de observar la realizacion z_t en el período t
- $\pi\left(z^t\right)$: probabilidad de observar la historia z^t en el período t
- $\pi\left(z^t \Big| z^{t-s}\right)$: probabilidad de observar la historia z^t en t condicional a observar la historia z^{t-s}

If $Z \subseteq R$ es infinito, z es una variable aleatoria continua. Entonces:

- $\phi(z_t)$: función de densidad para z en t

Modelo con Choques Tecnológicos Discretos

- Función de producción estocástica:

$$Y_t = e^{z_t} F(K_t, L_t)$$

en donde F satisface los supuestos habituales. Con $L_t = 1$, reescribimos:

$$Y_t = F(K_t, 1) = e^{z_t} f(K_t)$$

- Utilidad esperada:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left[c_t\left(z^t\right)\right] = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^t} \pi\left(z^t\right) \left\{\beta^t u\left[c_t\left(z^t\right)\right]\right\}$$

Equilibrio Competitivo Estocástico

Un equilibrio competitivo estocástico para esta economía es un conjunto de planes contingentes para las cantidades $c_t\left(z^t\right)$, $i_t\left(z^t\right)$, $k_{t+1}\left(z^t\right)$, $Y_t\left(z^t\right)$, $K_t\left(z^t\right)$ y los precios $w_t\left(z^t\right)$, $r_t\left(z^t\right)$ tales que:

i) Dados $k_0 > 0$, $w_t\left(z^t\right)$, $r_t\left(z^t\right)$ y el proceso estocástico para z, los planes $c_t\left(z^t\right)$, $i_t\left(z^t\right)$, y $k_{t+1}\left(z^t\right)$ resuelven el problema del consumidor:

$$\max \quad \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^t} \beta^t \pi\left(z^t\right) u\left[c_t\left(z^t\right)\right]$$

$$s.t. \quad c_t\left(z^t\right) + i_t\left(z^t\right) = w_t\left(z^t\right) + r_t\left(z^t\right) k_t\left(z^{t-1}\right) \qquad \forall z^t, \forall t$$

$$k_{t+1}\left(z^t\right) = (1-\delta) k_t\left(z^{t-1}\right) + i_t\left(z^t\right) \qquad \forall z^t, \forall t$$

ii) Para cada historia z^t en cada período t, dados $w_t\left(z^t\right)$ y $r_t\left(z^t\right)$, los valores $Y_t\left(z^t\right)$ y $K_t\left(z^t\right)$ resuelven el problema de la empresa:

$$\text{max} \qquad Y_t\left(z^t\right) - w_t\left(z^t\right) - r_t\left(z^t\right) K_t\left(z^t\right)$$

$$s.t. \qquad Y_t\left(z^t\right) = e^{z_t} f\left[K_t\left(z^t\right)\right]$$

iii) Para cada historia z^t en cada período t, los mercados se vacían:

$$Y_t\left(z^t\right) = c_t\left(z^t\right) + i_t\left(z^t\right)$$

$$K_t\left(z^t\right) = k_t\left(z^{t-1}\right)$$

`Problema del Planificador`

Dados $k_0 > 0$ y el proceso estocástico para z, el planificador social escoje planes contingentes para las cantidades $c_t\left(z^t\right)$, $i_t\left(z^t\right)$ y $k_{t+1}\left(z^t\right)$ resolviendo:

$$\text{max} \qquad \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^t} \beta^t \pi\left(z^t\right) u\left[c_t\left(z^t\right)\right]$$

$s.t.$

$$c_t\left(z^t\right) = e^{z_t} f\left[k_t\left(z^{t-1}\right)\right] - i_t\left(z^t\right) \qquad \forall z^t, \forall t$$

$$k_{t+1}\left(z^t\right) = (1-\delta) k_t\left(z^{t-1}\right) + i_t\left(z^t\right) \qquad \forall z^t, \forall t$$

Aún con incertidumbre, si no hay distorsiones o externalidades los Teoremas del Bienestar se cumplen

Lagrangiano intertemporal estocástico:

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^t} \left\{ \beta^t \pi\left(z^t\right) u\left[c_t\left(z^t\right)\right] \right.$$
$$- \lambda_{1t}\left(z^t\right)\left[c_t\left(z^t\right) + i_t\left(z^t\right) - e^{z_t} f\left[k_t\left(z^{t-1}\right)\right]\right]$$
$$\left. - \lambda_{2t}\left(z^t\right)\left[k_{t+1}\left(z^t\right) - (1-\delta) k_t\left(z^{t-1}\right) - i_t\left(z^t\right)\right]\right\}$$

Condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial c_t\left(z^t\right)} &= \beta^t \pi\left(z^t\right) u'\left[c_t\left(z^t\right)\right] - \lambda_{1t}\left(z^t\right) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial i_t\left(z^t\right)} &= -\lambda_{1t}\left(z^t\right) + \lambda_{2t}\left(z^t\right) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}\left(z^t\right)} &= \sum_{z^{t+1} \in Z^{t+1} | z^t} \lambda_{1t+1}\left(z^{t+1}\right) e^{z_{t+1}} f'\left[k_{t+1}\left(z^t\right)\right] \\
&\quad - \lambda_{2t}\left(z^t\right) + \sum_{z^{t+1} \in Z^{t+1} | z^t} \lambda_{2t+1}\left(z^{t+1}\right)(1-\delta) = 0
\end{aligned}$$

Resolviendo, la solución está caracterizada por:

- Ecuación de Euler (estocástica):

  $$u'\left[c_t\left(z^t\right)\right] = \beta E_t\left\{u'\left[c_{t+1}\left(z^{t+1}\right)\right]\left(e^{z_{t+1}}f'\left[k_{t+1}\left(z^t\right)\right] + (1-\delta)\right)\right\}$$

  con $E_t x\left(z^{t+1}\right) = \sum_{z^{t+1}\in Z^{t+1}|z^t} \frac{\pi\left(z^{t+1}\right)}{\pi\left(z^t\right)} x\left(z^{t+1}\right)$

- Condición de factibilidad:

  $$c_t\left(z^t\right) = e^{z_t} f\left[k_t\left(z^{t-1}\right)\right] - k_{t+1}\left(z^t\right) + (1-\delta)\, k_t\left(z^{t-1}\right)$$

- Condición de transversalidad:

  $$\lim_{t\to\infty} E_0 \beta^t u'\left[c_t\left(z^t\right)\right] k_{t+1}\left(z^t\right) = 0$$

Equilibrio Estacionario

- Resolviendo el equilibrio, obtenemos planes contingentes para todas las variables (cantidades, precios)

- Dado el proceso estocástico para el shock, estos planes definen procesos para las variables - difíciles de caracterizar

- NO hay un equilibrio estacionario en un sentido estricto, las variables se mueven permanentemente

- Podemos sin embargo tener un equilibrio en el cual las variables siguen un proceso estacionario estocástico - todos sus momentos (media, varianza, etc.) son constantes a lo largo del tiempo

Simplificando la Notación

Una vez que queda claro la naturaleza de los planes contingentes que constituyen un equilibrio competitivo estocástico, podemos simplificar la notación de manera tal que desaparezca la dependencia de las variables con respecto a las historias

Por ejemplo, escribimos el problema del planificador social como

$$\max \qquad E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

$s.t.$

$$c_t + i_t = e^{z_t} f(k_t)$$

$$k_{t+1} = (1-\delta) k_t + i_t$$

con lagrangiano intertemporal estocástico:

$$L = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \beta^t u(c_t) - \lambda_{1t} \left[c_t + i_t - e^{z_t} f(k_t) \right] \right.$$

$$\left. - \lambda_{2t} \left[k_{t+1} - (1-\delta) k_t - i_t \right] \right\}$$

y condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \beta^t u'(c_t) - \lambda_{1t} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial i_t} = -\lambda_{1t} + \lambda_{2t} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} = -\lambda_{2t} + E_t \left\{ \lambda_{1t+1} e^{z_{t+1}} f'(k_{t+1}) + \lambda_{2t+1} (1-\delta) \right\} = 0$$

Resolviendo, obtenemos nuevamente la ecuación de Euler (estocástica):

$$u'(c_t) = \beta E_t \left\{ u'(c_{t+1}) \left[e^{z_{t+1}} f'(k_{t+1}) + (1-\delta) \right] \right\}$$

(nótese que el lado derecho incluye una esperanza sobre la realización del choque tecnológico en $t+1$, condicional a su realización en t) y la condición de factibilidad:

$$c_t = e^{z_t} f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)\, k_t$$

Estas dos ecuaciones, más las condiciones iniciales (k_0, z_0), el proceso estocástico para z_t y la condición de transversalidad habitual caracterizan la solución del modelo

PROBLEMAS SELECCIONADOS

1. Una versión simple del modelo con choques tecnológicos

Considere la siguiente versión del modelo de crciemiento neoclásico con choques tecnológicos. La función de utilidad depende solo del consumo y está dada por

$$u(c) = \log(c)$$

y no hay crecimiento de la población ($n = 0$). De otro lado, la empresa representativa utiliza una función de producción estocástica para producir el único bien, dada por:

$$f(k, z) = e^z A k^\alpha$$

en donde z_t es un shock tecnológico i.i.d. en el tiempo y distribuido normalmente con media μ_z y varaianza σ_z^2

i) Defina un equilibrio competitivo estocástico para esta economía;

ii) Escriba el problema del planificador social;

iii) Asumiendo que la depreciación es completa ($\delta = 1$), verifique que la solución del problema en (ii) satisface:

$$k_{t+1} = \alpha\beta e^{z_t} A k_t^{\alpha}$$

iv) La solución propuesta en el inciso anterior define un proceso $AR(1)$ para el logaritmo de k_t:

$$\log(k_{t+1}) = \log(\alpha\beta A) + \alpha \log(k_t) + z_t$$

Partiendo de un k_0 arbitrario, caracterice las secuencias para la media μ_t y la varianza σ_t^2 de la variable aleatoria $\log(k_t)$ y encuentre el límite de esas secuencias cuando $t \to \infty$; y

v) Usando el resultado anterior, caracterice la distribución invariante para k_t y c_t

2. Resolviendo el modelo recursivo iterando la función de valor

(Antes de hacer esta pregunta revise el Apéndice I) Considere el mismo modelo de la pregunta anterior, pero en el cual la función de producción está dada por:

$$f(k, \theta) = \theta A k^{\alpha}$$

en donde θ sigue un proceso markoviano discreto de primer orden, con espacio de estados Θ y matriz de transición Π

i) Escriba el problema del planificador social usando el lenguage recursivo;

ii) Asuma los siguientes valores de los parámetros:

$$A = 10 \quad \alpha = 0.35 \quad \beta = 0.95 \quad \delta = 0.06$$

Asuma también que el choque tecnológico puede tomar solo tres valores: $\Theta = \{0, 0.5, 1\}$ y que el proceso markoviano correspondiente sigue la matriz de transición

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Resuelva numéricamente el problema del planificador social por el método de iteración de la función de valor, con una malla de valores para k con 300 puntos igualmente espaciados entre 0 y $1.5k^*$, donde k^* es el valor del stock de capital del estado estacionario determinístico. Grafique las reglas de decisión óptimas $k'(k, z)$ y $c(k, z)$ como función de k para cada uno de los niveles de θ

iii) Utilizando las reglas halladas en (ii), y partiendo de un capital inicial $k_0 = k^*$ y de $\theta_0 = 0.5$, simule y grafique una realización de las trayectorias óptimas para k_t, c_t, i_t, e y_t por 100 períodos. Finalmente, usando una simulación suficientemente larga (10,000 períodos, eliminando los primeros 1,000) calcule la desviación estándar del logaritmo de cada una de estas series y su correlación con el producto

APENDICE I

El Modelo en Lenguaje Recursivo

Variables de estado:

- Capital (individual y agregado)
- Historia de los shocks?

La distribución de probabilidad para el shock del siguiente período depende de toda la historia de realizaciones presente y pasadas

$$\mathrm{Prob}\,(z_{t+1}) \equiv \mathrm{Prob}\left(z_{t+1} \middle| Z^t\right)$$

a menos que el shock siga un proceso Markoviano

Procesos Markovianos de Primer Orden

Un proceso estocástico Markoviano de primer orden satisface:

$$\Pr\text{ob}\left(z_{t+1}\left|Z^{t}\right.\right)=\Pr\text{ob}\left(z_{t+1}\left|z_{t}\right.\right)$$

Un shock i.i.d puede verse como un caso especial de un proceso Markoviano

En varias aplicaciones, usaremos un proceso Markoviano discreto de primer orden, caracterizado por el espacio de estados $Z=\left(Z_{1,}..., Z_{q}\right)$ y la matriz de transición estacionaria

$$\Pi=\left[\begin{array}{ccc}\pi\left(Z_{1},Z_{1}\right) & .... & \pi\left(Z_{1},Z_{q}\right)\\ .... & .... & ....\\ \pi\left(Z_{q},Z_{1}\right) & .... & \pi\left(Z_{q},Z_{q}\right)\end{array}\right]$$

en donde

$$\pi\left(Z_{i},Z_{j}\right)=\Pr\text{ob}\left(z_{t+1}=Z_{j}\left|z_{t}=Z_{i}\right.\right)$$

y $\sum_{j=1}^{q}\pi\left(Z_{i},Z_{j}\right)=1$

Definiendo la distribución de probabilidad (incondicional)

$$\pi_{t}=\left[\begin{array}{c}\pi_{1t}\\ ....\\ \pi_{qt}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\Pr\text{ob}\left(z_{t}=Z_{1}\right)\\ ....\\ \Pr\text{ob}\left(z_{t}=Z_{q}\right)\end{array}\right]$$

El vector π_{t} evoluciona de acuerdo a:

$$\pi_{t+1}^{T}=\pi_{t}^{T}\times\Pi$$

Una distribución de probabilidad π^{*} es invariante si $\pi^{*T}=\pi^{*T}\times\Pi$

Un proceso Markoviano es asintóticamente estacionario si, partiendo de cualquier π_{0}, $\lim_{t\to\infty}\pi_{t}=\pi^{*}$

Resultado: si todos los elementos de Π son estrictamente positivos, el proceso correspondiente es asintó- ticamente estacionario y converge a una única distribución invariante

En otros casos, trabajaremos con procesos Markovianos continuos, como el $AR(1)$:

$$z' = \mu + \rho z + \varepsilon'$$

$$\varepsilon' \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

donde ε es una variable aleatoria, normalmente distribuida con media cero y varianza σ^2

Si $|\rho| < 1$, este proceso es estacionario por lo que la función de densidad condicional

$$g\left(z' \,|z\right) = \frac{1}{\sigma\,(2\pi)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(z' - \mu - \rho z)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

y sus principales momentos (media, varianza) son constantes a lo largo del tiempo

Problema del Planificador Social

Un planificador social benevolente escoje funciones $v(k,z)$, $c(k,z)$, $i(k,z)$, $k'(k,z)$ que resuelvan la ecuación de Bellman:

$$v(k,z) = \max_{c,i,k'} \left\{u(c) + \beta E_z v\left(k', z'\right)\right\}$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad c + i &= e^z f(k) \\ k' &= (1-\delta)\,k + i \end{aligned}$$

Como antes, si se cumplen los Teoremas del Bienestar, la solución a este problema es equivalente al equilibrio competitivo

Nótese que los planes contingentes correpondientes al equilibrio secuencial pueden encontrarse usando la regla de decisión óptima:

$$k_{t+1}\left(z^t\right) = k'\left(k'\left(k'(\ldots), z_{t-1}\right), z_t\right)$$

Programación Dinámica Estocástica

Considere la siguiente ecuación de Bellman:

$$v(x,z) = \max_{y} \left\{ F(x,z,y) + \beta E_z v\left(y, z'\right) \right\}$$

$$s.t. \quad y \in \Omega(x,z)$$

en donde z sigue un proceso Markoviano de primer orden

Los resultados de existencia, unicidad y contracción se siguen cumpliendo bajo las mismas condiciones para X, F, Ω y β, más algunos supuestos técnicos sobre el proceso estocástico z (ver Stokey-Lucas, Cap. 9)

Estos supuestos técnicos se satisfacen automáticamente con procesos Markovianos discretos o de tipo $AR(1)$

Iteración de la Función de Valor

Para implementar numéricamente este método, asumimos que el shock tecnológico z sigue un proceso Markoviano discreto de primer orden con espacio de estados $Z = \left(Z_{1,} ..., Z_q\right)$ y matriz de transición Π

Usando el Teorema de la Contracción, si partimos de cualquier función v^0 (por ejemplo, $v^0(k,z) = 0$) la secuencia v^n definida por:

$$v^{n+1}(k,z) = \max_{k'} \left\{ u\left[e^z f(k) + (1-\delta)k - k'\right] \right.$$

$$\left. + \beta \sum_{j=1}^{q} \pi\left(z, Z_j\right) v^n\left(k', Z_j\right) \right\}$$

$$s.t. \quad k' \in [0, e^z f(k) + (1-\delta)k]$$

converje a la solución v del problema del planificador social, si $n \to \infty$

Algoritmo:

1. Proponer un vector columna inicial $V^0 \in R^{pq}$ (por ejemplo, $V^0 = 0$) e inicializar $s = 0$

2. Para cada par $(K_i, Z_m) \in K \times Z$, dada V^s, calcular $V^{s+1}(K_i, Z_m)$ como:

$$\max_{K_j \in K} \left\{ u\left[e^{Z_m} f(K_i) + (1-\delta) K_i - K_j \right] + \beta \sum_{n=1}^{q} \pi(Z_m, Z_n) V^s \left(K_j, Z_n\right) \right\}$$

$$\text{s.t.} \quad K_j \leq e^{Z_m} f(K_i) + (1-\delta) K_i$$

en donde $K = \left(K_{1,} K_{2,} ..., K_p\right)$ es la malla de valores para el capital k

3. Calcular $\left\| V^{s+1} - V^s \right\|$. Si la distancia es mayor que el criterio de tolerancia, volver al paso 2 con $s = s + 1$. En caso contrario, el algoritmo converge

Al terminar el algoritmo obtenemos una aproximación a la función de valor del planificador v en cada punto de la malla de estados:

$$V = \begin{bmatrix} V(K_1, Z_1) \\ ... \\ V(K_p, Z_q) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} v(K_1, Z_1) \\ ... \\ v(K_p, Z_q) \end{bmatrix}$$

junto con la correspondiente regla de decisión $G(K_i, Z_m)$

Simulación de Trayectorias Optimas

La trayectoria óptima del capital depende de la historia de realizaciones para z

Para obtener una serie de tiempo particular $k_0, k_1, ..., k_T$ partiendo de (k_0, z_0) dados, necesitamos simular primero la historia $z_0, z_1, ..., z_T$ usando un generador de números aleatorios y la información en la matriz de transición Π

- Dado $z_0 = Z_i$, extraer z_1 de $Z = \left(Z_{1,}..., Z_q\right)$ asignando probabilidad π_{ij} al estado Z_j

- Recursivamente, dado $z_n = Z_i$, extraer z_{n+1} de $Z = \left(Z_{1,}..., Z_q\right)$ asignando probabilidad π_{ij} al estado Z_j

- Continuar hasta completar una historia $z_0, z_1, ..., z_T$

Una vez conocida la historia de los shocks, calculamos recursivamente la trayectoria óptima para el capital $(k_0, k_1, ..., k_T)$ usando la regla de decisión G

$$\left.\begin{array}{c} k_t = K_j \\ z_t = Z_i \end{array}\right\} \Rightarrow k_{t+1} = G\left(K_j, Z_i\right)$$

y luego calculamos las correspondientes trayectorias óptimas para otras variables

Estas trayectorias representan series de tiempo, sus principales estadísticos (media, varianza, correlaciones entre ellas) pueden calcularse y compararse con los datos

Sin embargo, estas series de tiempo y sus estadísticos dependen de una particular realización de los shocks

Por ello, se recomiendo hacer una simulación "larga" ($T = 10,000$ períodos, dejando de lado los primeros 1000) de manera tal de aproximar los estadísticos de la distribución invariante (ley de los grandes números)

II. CICLOS ECONOMICOS REALES

Ciclos económicos: fluctuaciones de corto plazo de la economía en torno a su senda de crecimiento de largo plazo

Tradición Keynesiana:

- Cambios en la demanda agregada generan desequilibrios temporales en la economía

- Modelos estáticos de corto plazo (IS/LM) + curva de Phillips

Enfoque Neoclásico:

- Fluctuaciones como reacciones de equilibrio de la economía ante choques exógenos (de oferta o demanda)

- Extensiones del modelo de crecimiento neoclásico con choques estocásticos

- Análisis de regularidades estadísticas de las series de tiempo

`Representación de los Ciclos Económicos`

Distinguir crecimiento de largo plazo (tendencia) de fluctuaciones de corto plazo (ciclos) en los datos

Podemos descomponer las serie de observaciones de la variable Y_t:

$$Y_t = Y_t^g \times Y_t^c \qquad t = 1, ...T$$

Y_t^g : componente de tendencia

Y_t^c : componente cíclico

Tomando logaritmos:

$$y_t = y_t^g + y_t^c$$

Filtro de Hodrick-Prescott (*HP*): hallar una serie y_t^g que minimice

$$\sum_{t=1}^{T} \left(y_t - y_t^g\right)^2 + \lambda \sum_{t=1}^{T} \left[\left(y_{t+1}^g - y_t^g\right) - \left(y_t^g - y_{t-1}^g\right)\right]^2$$

El parámetro λ mide el peso que se da a la suavidad de y_t^g en relación a su cercanía a y_t

- Si $\lambda = 0$, y_t^g es igual a y_t

- Si $\lambda \to \infty$, y_t^g tiende a una linea recta

Para datos trimestrales, se recomienda el valor $\lambda = 1600$

Una vez hallado y_t^g, el componente cíclico se encuentra usando $y_t^c = y_t - y_t^g$

Propiedades Estadísticas de los Ciclos

El siguiente paso es encontrar regularidades en el comportamiento de los componentes cíclicos de las principales variables macroeconómicas

($\widetilde{x}_t$: logaritmo del componente cíclico de X)

- Varianza relativa al producto: $S.D.\left(\widetilde{x}_t\right)/S.D.\left(\widetilde{y}_t\right)$

Indica si la variable X fluctúa más o menos que el producto

- Correlación con el producto: $Corr\left(\widetilde{x}_t, \widetilde{y}_t\right)$

Indica si la variable X es procíclica o contracíclica

- Correlaciones con retardos: $Corr\left(\widetilde{x}_{t\pm s}, \widetilde{y}_t\right)$

Indican si la variable X se anticipa o retrasa con respecto al ciclo económico

Ejemplo para Estados Unidos:

	Estadísticos
$S.D.(y)$	0.0172
$S.D.(c)$	0.0127
$S.D.(i)$	0.0824
$S.D.(l)$	0.0159
$Corr(y,c)$	0.83
$Corr(y,i)$	0.91
$Corr(y,l)$	0.86

Kydland y Prescott (1990) encuentran para Estados Unidos las siguientes regularidades:

- El consumo, la inversión, el empleo y el salario real son procíclicos
- El consumo y el salario real son menos volatiles que el producto
- La inversión es más volatil que el producto y el empleo tiene la misma volatilidad que el producto
- El nivel de precios es contracíclico
- Los agregados monetarios son procíclicos, pero no se adelantan al ciclo económico

Agenor, McDermott, Prasad (1999) hacen el mismo estudio para países en desarrollo, y encuentran que:

- Las fluctuaciones son en promedio mayores que en países desarrollados
- El salario real es procíclico
- Los ciclos de países desarrollados y en desarrollo están fuertemente *sincronizados*
- La tasa de interés mundial y los términos de intercambio son procíclicos
- No hay una correlación evidente entre agregados monetarios y el producto, ni entre el tipo de cambio y el producto

Otros resultados en la literatura

En economías abiertas (España, Chile, México) se suele encontrar un resultado paradójico:

- Si bien la inversión es procíclica y fluctúa más que el producto, cómo en Estados Unidos ...

  ... el consumo, que también es procíclico, fluctúa más que el producto

$\Rightarrow$ En estos países, la cuenta corriente suele ser fuertemente contracíclica y volatil

Si comparamos la volatilidad del consumo con la de la absorción $(C+I+G)$, esta última sí es mayor

`Un Modelo Simple de Ciclos Económicos Reales`

Modelo de crecimiento neoclásico con:

- Decisión consumo-ocio

- Cambio técnico exógeno

- Choques tecnológicos que afectan la función de producción

El modelo es consistente con los hechos estilizados del crecimiento para Estados Unidos - Kydland y Prescott (1982): *¿puede este modelo reproducir también las fluctuaciones?*

- Función de producción:

$$Y_t = e^{z_t} F\left(K_t, A_t L_t\right)$$

- z_t : choque tecnológico que afecta la productividad total de los factores

  Sigue un proceso AR(1):

  $$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_{t+1}$$

  donde ε_t es un ruido blanco con varianza σ^2

- A_t : nivel tecnológico que afecta la productividad del trabajo

  Crece a la tasa exógena g (progreso técnico)

- L_t : tamaño de la población ($L_t^s \leq L_t$)

  Crece a la tasa exógena n

Expresando todas las variables en unidades del único bien por unidades de trabajo efectivo

$$\widehat{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t} \qquad \widehat{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t} \qquad \widehat{c}_t = \frac{C_t}{A_t L_t} \qquad l_t = \frac{L_t^s}{L_t}$$

escribimos la función de producción:

$$\widehat{y}_t = e^{z_t} F\left(\widehat{k}_t, l_t\right)$$

la función de utilidad intertemporal:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(\widehat{c}_{t,} 1 - l_t)$$

la restricción presupuestaria:

$$\widehat{c}_t + \widehat{i}_t = \widehat{w}_t l_t + r_t \widehat{k}_t$$

y la regla de acumulación del capital:

$$(1+n)(1+g)\,\widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\widehat{k}_t + i_t$$

Un equilibrio competitivo estocástico para esta economía es un conjunto de planes contingentes para las cantidades $\widehat{c}_t$, $\widehat{i}_t$, $\widehat{k}_{t+1}$, $\widehat{y}_t$ y los precios $\widehat{w}_t$, r_t tales que:

i) Dados $\widehat{k}_0 > 0$, $\widehat{w}_t$, r_t los planes $\widehat{c}_t$, $\widehat{i}_t$, y $\widehat{k}_{t+1}$ resuelven el problema del consumidor:

$$\max \qquad E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(\widehat{c}_t, 1 - l_t\right)$$

$$s.t. \qquad \widehat{c}_t + \widehat{i}_t = \widehat{w}_t + r_t \widehat{k}_t$$

$$(1+n)(1+g)\,\widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\,\widehat{k}_t + \widehat{i}_t$$

$$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

ii) Para cada historia en cada período t, dados $\widehat{w}_t$ y r_t, los valores $\widehat{y}_t$ y $\widehat{k}_t$ resuelven el problema de la empresa:

$$\begin{aligned} \text{max} \qquad & \widehat{y}_t - \widehat{w}_t - r_t\widehat{k}_t \\ s.t. \qquad & \widehat{y}_t = e^{z_t}F\left(\widehat{k}_t, l_t\right) \end{aligned}$$

iii) Para cada historia en cada período t, los mercados se vacían:

$$\widehat{y}_t = \widehat{c}_t + \widehat{i}_t$$

La solución del equilibrio competitivo nos da planes contingentes para las variables, que dependen de las realizaciones de los choques tecnológicos

Un equilibrio *determinístico* se obtiene eliminando la incertidumbre, es decir, imponiendo $z_t = 0$, $\forall t$

Un estado estacionario determinístico es un equilibrio determinístico en el cual:

- Las variables en unidades efectivas de trabajo ($\widehat{y}_t$, $\widehat{k}_t$, $\widehat{c}_t$, $\widehat{i}_t$, $\widehat{w}_t$);

- La oferta de trabajo per capita (l_t); y

- La tasa de retorno del capital (r_t)

... permanecen constantes a lo largo de tiempo

$\Rightarrow$ Las variables per capita crecen a la tasa del progreso técnico g (senda de crecimiento balanceado)

Restringiendo el Modelo

El modelo anterior es dificil de resolver analíticamente

Para usar métodos numéricos se necesita especificar formas funcionales y dar valores a los parámetros

Función de producción Cobb-Douglas:

$$F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

Función de utilidad separable en consumo y ocio:

$$u(c, 1-l) = (1-\phi)\log c + \phi \log(1-l)$$

Con estas formas funcionales, podemos facilmente derivar las condiciones de primer orden del modelo, que se resumen en la ecuación de Euler estocástica

$$\frac{(1+n)(1+g)}{\beta}\left(\frac{1}{\widehat{c}_t}\right) = E_t\left\{\frac{1}{\widehat{c}_{t+1}}\left[r_{t+1} + (1-\delta)\right]\right\}$$

la condición estática consumo-ocio

$$(1-\phi)\frac{1}{\widehat{c}_t} = \frac{\phi\left(\frac{1}{1-l_t}\right)}{\widehat{w}_{tt}}$$

y la condición de factibilidad

$$\widehat{c}_t = \widehat{y}_t - (1+n)(1+g)\widehat{k}_{t+1} + (1-\delta)\widehat{k}_t$$

Calibración del Modelo

Falta escoger valores para los parámetros del modelo: α, ϕ, β, δ, n, g, ρ y σ. Dos enfoques:

Estimación estructural: econometría que toma en cuenta las restricciones impuestas por el modelo

- Máxima verosimilitud

- Métodos de momentos

- Métodos bayesianos

Calibración: ajusta los parámetros del modelo para que la senda de crecimiento balanceado determinística ($z_t = 0$, $\forall t$) sea consistente con algunas observaciones de largo plazo para la economía

El enfoque adecuado depende de la pregunta

El método de calibración permite aprender de las deficiencias empíricas del modelo

Calibrando el modelo anterior:

1. Obtener n como la tasa de crecimiento promedio de la población

2. Obtener g como la tasa de crecimiento promedio del producto per cápita (mejor si es del producto por trabajador)

3. Dados n y g, obtener β usando la tasa de interés real ι y la relación de estado estacionario:

$$\frac{(1+n)(1+g)}{\beta} = r + (1-\delta) \equiv 1 + \iota$$

4. Obtener α usando la participación del retorno al trabajo (salarios mas otro tipo de compensaciones) en el producto total:

$$1 - \alpha = \frac{wL}{Y}$$

5. Dados n, g, α y β, obtener δ usando la tasa de ahorro $s \equiv \frac{I}{Y}$ y la relación de estado estacionario:

$$\begin{aligned} s &= (\delta + n + g + ng)\frac{K}{Y} = (\delta + n + g + ng)\frac{\alpha}{r} \\ &= \frac{\alpha(\delta + n + g + ng)}{\frac{(1+n)(1+g)}{\beta} - (1-\delta)} \end{aligned}$$

6. Dado α, obtener ϕ usando la tasa de ahorro s y la proporción del tiempo destinado al mercado de trabajo ($l \approx 0.3$) y la relación de estado estacionario:

$$\begin{aligned}
\frac{\phi}{1-\phi} &= \left(\frac{1-l}{\widehat{c}}\right)\widehat{w} = \left(\frac{1-l}{l}\right)\left(\frac{wl}{y}\right)\left(\frac{y}{c}\right) \\
&= \left(\frac{1-l}{l}\right)(1-\alpha)\left(\frac{1}{1-s}\right)
\end{aligned}$$

Nos queda calibrar el proceso estocástico para los choques tecnológicos

Dada su especificación AR(1), los principales momentos para z_t están dados por:

$$Ez_t = 0 \qquad Ez_t^2 = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \qquad Ez_t z_{t-1} = \frac{\rho\sigma^2}{1-\rho^2}$$

En los datos, z_t coresponde al residuo de Solow:

$$z_t = \log Y_t - (1-\alpha)\log\left[A_0(1+g)\right]t - \alpha\log K_t - (1-\alpha)\log L_t$$

Obteniendo series para el stock de capital y el empleo, podemos calcular una serie para z_t, observar sus momentos muestrales y encontrar los valores de A_0, ρ y σ que sean consistentes con dichos momentos

`Principales Resultados`

Una vez obtenidas las formas funcionales y los valores de los parámetros, se puede simular las trayectorias de equilibrio para las variables de interés

Métodos numéricos:

- Iteración de la función de valor
- Linearización en torno al estado estacionario

El modelo se simula por un número grande de períodos (10,000), descartando las primeras 1,000 observaciones a fin de aproximar el estado estacionario estocástico

Los resultados obtenidos simulando el modelo de Ciclos Económicos Reales para la economía de Estados Unidos quedan resumidos en la siguiente tabla

	Modelo	Datos
$S.D.(y)$	0.0135	0.0172
$S.D.(c)$	0.0033	0.0127
$S.D.(i)$	0.0595	0.0824
$S.D.(l)$	0.0077	0.0159
$Corr(y,c)$	0.85	0.83
$Corr(y,i)$	0.99	0.91
$Corr(y,l)$	0.72	0.86

Todas las variables (tanto en los datos como en la simulación) fueron ajustadas mediante el filtro de Hodrick y Prescott para aislar el logaritmo del componente cíclico

El modelo con choques tecnológicos reproduce bien

- Las correlaciones entre las principales variables observadas en los datos

  El consumo, la inversión y las horas trabajadas son fuertemente procíclicos

- El 70% de la variabilidad observada en el producto

- Algunas volatilidades relativas

  La inversión es más volatil que el consumo y las horas trabajadas

Pero, las horas trabajadas fluctúan mucho menos que en los datos

Intuición: un choque tecnológico positivo

- Aumenta la productividad de los factores, luego el ingreso y el consumo

- Aumenta la rentabilidad del capital, por lo que los agentes incrementan fuertemente la inversión (sustitución intertemporal del consumo)

- Al aumentar los salarios, los agentes ofrecen mayor cantidad de horas de trabajo al mercado (sustitución intertemporal del ocio)

Estos efectos generan los patrones de correlación en las variables

¿Por qué las horas trabajadas fluctúan tan poco?

Con la función de utilidad:

$$u(c, 1-l) = (1-\phi)\log c + \phi \log(1-l)$$

el efecto sustitución y el efecto ingreso sobre la oferta de trabajo se cancelan (solo sustitución intertemporal)

Pero esta función de utilidad es necesaria para tener una senda de crecimiento balanceada

La escasa volatilidad en las horas trabajadas genera un pobre efecto magnificador sobre el producto

$$Y_t = e^{z_t} F\left(K_t, A_t L_t\right)$$

`Críticas al Modelo`

- ¿Qué es un choque tecnológico?

  ¿Son estos choques exógenos?

  ¿Cómo interpretar un choque negativo?

- Los mecanismos de propagación son débiles

- ¿Qué pasa con las variables nominales?

- ¿Qué ocurre con otras fuentes de fluctuaciones (choques de demanda)?

Algunos trabajos posteriores al artículo de Kydland y Prescott han intentado mejorar las predicciones del modelo de Ciclos Económicos Reales

- Hansen (1985): Trabajo indivisible y loterías

  El choque tecnológico actúa sobre el margen de personas empleadas, aumentando la elasticidad de sustitución intertemporal del ocio

  El modelo consigue reproducir las fluctuaciones en horas trabajadas en los datos

- McGrattan (1994): Choques fiscales - gasto de gobierno, impuestos

  Los impuestos distorsionan las decisiones de los hogares

  Estos choques generan mayor volatilidad en las variables, para el mismo choque tecnológico

PROBLEMAS SELECCIONADOS

1. Ciclos económicos con producción en el hogar

Considere un modelo de ciclos económicos reales con producción en el hogar. La familia representativa maximiza su utilidad esperada

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\gamma \log c_t^m + (1-\gamma) \log c_t^h + \log\left(1 - l_t^m - l_t^h\right)\right]$$

en donde c_t^m es el consumo del bien producido en el mercado, c_t^h es el consumo del bien producido en el hogar, l_t^m es la fracción del tiempo destinado al mercado laboral y l_t^h es la fracción del tiempo destinada a la producción en el hogar; sujeto a la restricción presupuestaria

$$c_t^m + i_t = w_t l_t^m + r_t k_t$$

la tecnología para producir bienes en el hogar, descrita por la función de producción

$$c_t^h = \left(l_t^h\right)^{\phi}$$

y la ley de movimiento del capital habitual. La empresa representativa opera una tecnología descrita por la función de producción

$$y_t = e^{z_t} \left(k_t\right)^{\alpha} \left(l_t^m\right)^{1-\alpha}$$

en donde z_t es un choque tecnológico que sigue un proceso $AR(1)$

$$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_{t+1}$$

y ε_t es una variable aleatoria i.i.d. y normalmente distribuida, con media cero y varianza σ_ε^2. No hay crecimiento de la población, ni progreso técnico.

i) Defina un equilibrio competitivo estocástico para esta economía;

ii) Escriba el problema del planificador social y obtenga las condiciones de primer orden;

iii) Caracterice lo mejor posible el estado estacionario determinístico, con $\varepsilon_t = 0$, $\forall t$;

iv) Dada la siguiente información de largo plazo

$$\frac{wl^m}{y} = 0.6 \quad \frac{k}{y} = 4 \quad \frac{i}{y} = 0.3 \quad l^m = 0.3 \quad l^h = 0.1$$

calibre los parámetros β, δ, α, γ, ϕ;

v) Suponga que hay un choque tecnológico positivo ($\varepsilon_t \uparrow \Rightarrow z_t \uparrow$). ¿Qué sucede con la fracción del tiempo destinada al mercado de trabajo, a la producción en el hogar y al ocio? ¿Es la volatilidad de las horas destinadas al mercado laboral mayor o menor en este modelo, comparado con el modelo de ciclos económicos reales sin producción en el hogar? Explique

2. Choques fiscales y ciclos económicos

Considere ahora una versión del modelo de ciclos económicos reales con choques fiscales. La empresa representativa produce el único bien con la tecnología descrita por

$$Y_t = F(K_t, A_t L_t) = K_t^{\alpha} (A_t L_t)^{1-\alpha}$$

en donde A_t crece a la tasa exógena g. La familia representativa maximiza su utilidad esperada

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\log \left(\frac{C_t}{L_t} \right) + \gamma \log \left(1 - \frac{L_t^s}{L_t} \right) \right]$$

sujeto a la restricción presupuestaria y la ley de movimiento del capital habitual. El tamaño de la familia L_t crece a la tasa exógena n. Finalmente, hay un gobierno que cobra impuesto al ingreso laboral a una tasa τ_t estocástica, que sigue el proceso $AR(1)$

$$\tau_{t+1} = \tau^* (1 - \rho) + \rho \tau_t + \varepsilon_{t+1}$$

en donde ε_t es una variable aleatoria i.i.d. y normalmente distribuida, con media cero y varianza σ_ε^2. La realización del choque fiscal es observada a comienzos del período. Nótese que por construcción el valor medio de τ_t es τ^*. La recaudación de este impuesto es usada para financiar un gasto de gobierno improductivo (recursos arrojados al mar). No hay deuda pública, por lo que el gobierno debe mantener un presupuesto balanceado en cada período.

i) Usando variables por unidades efectivas de trabajo, defina un equilibrio competitivo estocástico para esta economía;

ii) Obtenga las condiciones de primer orden y caracterice lo mejor posible el equilibrio determinístico, con $\varepsilon_t = 0$, $\forall t$;

iii) Usando las condiciones en (ii) y las siguientes observaciones de largo plazo:

- Tasa de crecimiento del PIB per capita: 0.03

- Tasa de crecimiento de la población: 0.02

- Participación de las remuneraciones (antes de impuestos) en el ingreso nacional: 0.7

- Ratio capital sobre producto (K/Y): 2

- Fracción del tiempo destinada al mercado de trabajo: 0.3

- Gasto de gobierno como fracción del PIB (G/Y): 0.2

- Tasa de ahorro o ratio inversión sobre PIB (I/Y): 0.16

calibre los parámetros g, n, α, β, δ, γ y τ^*. ¿Que estrategia sugiere para calibrar ρ y σ_ε^2?

iv) Analice el efecto de un choque fiscal positivo ($\varepsilon_t \uparrow \Rightarrow \tau_t \uparrow$) sobre el consumo, la inversión, el producto y las horas trabajadas. ¿Que patrón de correlaciones entre estas variables obtiene en este modelo? ¿Es este patrón diferente al que se obtendría en el modelo de ciclos económicos reales con choques tecnológicos? No necesita demostrar nada, solo dar una intuición

3. Ciclos económicos con choques de preferencias

Considere finalmente un modelo de ciclos económicos reales en el cual tenemos en vez de choques tecnológicos un choque en las preferencias por el ocio. Las preferencias del consumidor representativo están dadas por:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\log\left(\frac{C_t}{\bar{L}_t}\right) + \gamma_t \log\left(1 - \frac{L_t}{\bar{L}_t}\right)\right]$$

en donde γ_t es una variable aleatoria que sigue un proceso AR(1)

$$\gamma_{t+1} = \gamma(1-\rho) + \rho\gamma_t + \varepsilon_{t+1} \qquad \varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

La idea es que algunos días los agentes se despiertan con más ganas de trabajar, otras no. El tamaño de la familia representativa $\bar{L}_t$ crece a la tasa exógena n. La empresa representativa opera la función de producción determinística:

$$Y_t = F(K_t, A_t L_t) = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}$$

en donde la productividad del trabajo A_t crece a la tasa exógena g. La ley de movimiento del capital es la habitual

i) Usando variables por unidades efectivas de trabajo, defina un equilibrio competitivo estocástico para esta economía;

ii) Encuentre la ecuación de Euler estocástica para el consumidor y la condición estática trabajo-ocio. Dé una interpretación de ambas;

iii) Usando las condiciones de primer orden del problema determinístico (con $\gamma_t = \gamma$, $\forall t$), calibre los parámetros del modelo (α, g, n, β, δ, γ) a las siguientes observaciones de largo plazo:

- Tasa de crecimiento del PIB per capita: 0.02

- Tasa de crecimiento de la población: 0.01

- Participación de las remuneraciones al trabajo en el ingreso nacional: 0.6

- Tasa de interés real: 5%

- Fracción del tiempo destinada al mercado de trabajo: 0.7

- Tasa de ahorro (o ratio inversión sobre PIB): 0.2

iv) Suponga que hay un choque positivo en la utilidad del ocio ($\varepsilon_t \uparrow \Longrightarrow \gamma_t \uparrow$). Analice el efecto de este choque sobre el producto, la inversión, el consumo y las horas trabajadas. ¿Son estas tres últimas variables procíclicas o contracíclicas en el modelo? No necesitan demostrar nada, solo dar una intuición

III. LOG-LINEARIZACION DEL MODELO DE CICLOS ECONOMICOS

`Repaso de Algunas Formulas Utiles`

Definimos $\widetilde{x}_t$ como la desviación de la variable x_t con respecto a su valor de estado estacionario x^* en logaritmos

$$\widetilde{x}_t \equiv \log(x_t) - \log(x^*)$$

Usando la siguiente aproximación, para valores pequeños de cualquier variable y_t,

$$y_t \approx \log(1 + y_t)$$

esta desviación puede interpretarse en puntos porcentuales

$$\widetilde{x}_t = \log\left(\frac{x_t}{x^*}\right) \approx \frac{x_t - x^*}{x^*}$$

Algunos ejemplos sencillos de log-linearización

$$Ax_t = B \quad \Rightarrow \quad \widetilde{x}_t = 0$$

$$Ax_t = By_t \quad \Rightarrow \quad \widetilde{x}_t = \widetilde{y}_t$$

$$Ax_t y_t = B \quad \Rightarrow \quad \widetilde{x}_t + \widetilde{y}_t = 0$$

$$Ax_t^{\alpha} y_t^{\beta} = B \quad \Rightarrow \quad \alpha\widetilde{x}_t + \beta\widetilde{y}_t = 0$$

Un poco más difícil

$$Ax_t + By_t = C \quad \Rightarrow \quad Ax^*\widetilde{x}_t + By^*\widetilde{y}_t = 0$$

¿Por qué? Usar interpretación en desviaciones porcentuales

Por último, si tenemos una ecuación no-lineal que no se puede log-linearizar directamente

$$F(x_t, y_t) = 0$$

podemos siempre usar *una aproximación de Taylor* en torno al estado estacionario

$$F(x^*, y^*) + F_x(x^*, y^*)(x_t - x^*) + F_y(x^*, y^*)(y_t - y^*) = 0$$

es decir

$$x^* F_x(x^*, y^*)\,\widetilde{x}_t + y^* F_y(x^*, y^*)\,\widetilde{y}_t = 0$$

dado que en estado estacionario también debe cumplirse que $F(x^*, y^*) = 0$

Nótese que las formulas de la página anterior pueden derivarse a partir de esta regla general

Log-Linearizando el Modelo de Ciclos Económicos Reales

Recordemos las condiciones de primer orden del modelo de ciclos económicos reales, con función de utilidad logarítmica y tecnología Cobb-Douglas:

$$\frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{1}{c_t}\right) = E_t\left\{\frac{1}{c_{t+1}}\left[r_{t+1} + (1-\delta)\right]\right\}$$

$$(1-\phi)\frac{1}{c_t} = \frac{\phi\left(\frac{1}{1-l_t}\right)}{w_t}$$

$$c_t = y_t - \gamma k_{t+1} + (1-\delta)\,k_t$$

en donde $\gamma \equiv (1+n)(1+g)$. Todas las variables están en unidades efectivas de trabajo menos el empleo, que es en términos per-cápita

La función de producción

$$y_t = e^{z_t} k_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha}$$

junto con los precios

$$w_t = (1-\alpha)\, e^{z_t} k_t^{\alpha} l_t^{-\alpha}$$

$$r_t = \alpha e^{z_t} k_t^{\alpha-1} l_t^{1-\alpha}$$

y el proceso estocástico para el choque tecnológico

$$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_{t+1}^z \qquad \varepsilon_t^z \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

completan la caracterización del equilibrio competitivo

El estado estacionario determinístico del modelo lo podemos encontrar facilmente, resolviendo el sistema

$$\frac{\gamma}{\beta} = \alpha\,(k^*)^{\alpha-1}\,(l^*)^{1-\alpha} + (1-\delta)$$

$$(1-\phi)\,\frac{1}{c^*} = \frac{\phi\left(\frac{1}{1-l^*}\right)}{(1-\alpha)\,(k^*)^{\alpha}\,(l^*)^{-\alpha}}$$

$$c^* = (k^*)^{\alpha}\,(l^*)^{1-\alpha} - [\gamma - (1-\delta)]\,k^*$$

para k^*, l^* y c^*

Luego encontramos

$$y^* = (k^*)^{\alpha}\,(l^*)^{1-\alpha}$$

$$w^* = (1-\alpha)\,(k^*)^{\alpha}\,(l^*)^{-\alpha} \qquad r^* = \alpha\,(k^*)^{\alpha-1}\,(l^*)^{1-\alpha}$$

Empezamos log-linearizando las condiciones de primer orden más sencillas

$$\widetilde{y}_t = z_t + \alpha \widetilde{k}_t + (1-\alpha)\,\widetilde{l}_t \tag{1}$$

$$\widetilde{w}_t = z_t + \alpha \widetilde{k}_t - \alpha \widetilde{l}_t \tag{2}$$

$$\widetilde{r}_t = z_t - (1-\alpha)\,\widetilde{k}_t + (1-\alpha)\,\widetilde{l}_t \tag{3}$$

Nótese que $\widetilde{e^{z_t}} \equiv \log\left(e^{z_t}\right) - \log\left(e^{0}\right) = z_t$

La condición de factibilidad queda

$$c^* \widetilde{c}_t = y^* \widetilde{y}_t - \gamma k^* \widetilde{k}_{t+1} + (1-\delta)\,k^* \widetilde{k_t}$$

es decir

$$\left(\frac{c^*}{k^*}\right)\widetilde{c}_t = \left(\frac{y^*}{k^*}\right)\widetilde{y}_t - \gamma \widetilde{k}_{t+1} + (1-\delta)\,\widetilde{k}_t$$

o, reemplazando $\widetilde{y}_t$ usando (1)

$$\left(\frac{c^*}{k^*}\right)\widetilde{c}_t = \left[\left(\frac{y^*}{k^*}\right)\alpha + (1-\delta)\right]\widetilde{k}_t + \left(\frac{y^*}{k^*}\right)(1-\alpha)\,\widetilde{l}_t + \left(\frac{y^*}{k^*}\right)z_t - \gamma \widetilde{k}_{t+1} \tag{4}$$

Podemos escribir la condición estática consumo-ocio en logs

$$\log(1-\phi) - \log(c_t) + \log(w_t) - \log(\phi) + \log(1-l_t) = 0$$

por lo tanto

$$\widetilde{w}_t - \widetilde{c}_t + \widetilde{(1-l_t)} = 0$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}\widetilde{(1-l_t)} &\approx \frac{(1-l_t)-(1-l^*)}{(1-l^*)} \\ &= -\frac{l_t - l^*}{1-l^*} = -\left(\frac{l^*}{1-l^*}\right)\frac{l_t - l^*}{l^*} \approx -\left(\frac{l^*}{1-l^*}\right)\widetilde{l}_t\end{aligned}$$

de donde reescribimos

$$\widetilde{w}_t - \widetilde{c}_t - \left(\frac{l^*}{1-l^*}\right)\widetilde{l}_t = 0$$

o, reemplazando $\widetilde{w}_t$ usando (2)

$$z_t + \alpha\widetilde{k}_t - \left[\alpha + \frac{l^*}{1-l^*}\right]\widetilde{l}_t - \widetilde{c}_t = 0 \tag{5}$$

Finalmente, nos queda la ecuación de Euler

$$\frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{1}{c_t}\right) = E_t\left\{\frac{1}{c_{t+1}}\left[r_{t+1}+(1-\delta)\right]\right\}$$

de donde

$$\begin{aligned}
-\widetilde{c}_t &= E_t\left\{\widetilde{\frac{1}{c_{t+1}}\left[r_{t+1}+(1-\delta)\right]}\right\} \\
&= E_t\left\{\widetilde{r_{t+1}+(1-\delta)}-\widetilde{c}_{t+1}\right\} \\
&= E_t\left\{\psi\widetilde{r}_{t+1}-\widetilde{c}_{t+1}\right\} = \psi E_t\widetilde{r}_{t+1} - E_t\widetilde{c}_{t+1}
\end{aligned}$$

con $\psi \equiv \frac{r^*}{r^*+(1-\delta)} = \frac{\gamma/\beta-(1-\delta)}{\gamma/\beta}$. Reemplazando $\widetilde{r}_t$ usando (3)

$$-\widetilde{c}_t = \psi E_t z_{t+1} - (1-\alpha)\,\psi E_t\widetilde{k}_{t+1} + (1-\alpha)\,\psi E_t\widetilde{l}_{t+1} - E_t\widetilde{c}_{t+1} \qquad (6)$$

Reescribiendo las ecuaciones (4)-(6), el sistema log-linearizado para este modelo queda como

$$\gamma\widetilde{k}_{t+1} - \left[(1-\delta)+\left(\frac{y^*}{k^*}\right)\alpha\right]\widetilde{k}_t - \left(\frac{y^*}{k^*}\right)(1-\alpha)\,\widetilde{l}_t + \left(\frac{c^*}{k^*}\right)\widetilde{c}_t - \left(\frac{y^*}{k^*}\right)z_t = 0$$

$$\alpha\widetilde{k}_t - \left[\alpha+\frac{l^*}{1-l^*}\right]\widetilde{l}_t - \widetilde{c}_t + z_t = 0$$

$$-(1-\alpha)\,\psi E_t\widetilde{k}_{t+1} + (1-\alpha)\,\psi E_t\widetilde{l}_{t+1} - E_t\widetilde{c}_{t+1} + \psi E_t z_{t+1} + \widetilde{c}_t = 0$$

con

$$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon^z_{t+1} \qquad \varepsilon^z_t \sim N\left(0,\sigma^2\right)$$

`Método de Coeficientes Indeterminados`

Supongamos la siguientes regla de decisión óptima

$$\widetilde{k}_{t+1} = a_1\widetilde{k}_t + a_2 z_t$$

Dada esta regla, podemos reescribir la condición de factibilidad (4) como

$$\gamma \left[a_1\widetilde{k}_t + a_2 z_t\right] - \left[(1-\delta) + \left(\frac{y^*}{k^*}\right)\alpha\right]\widetilde{k}_t$$

$$- \left(\frac{y^*}{k^*}\right)(1-\alpha)\,\widetilde{l}_t + \left(\frac{c^*}{k^*}\right)\widetilde{c}_t - \left(\frac{y^*}{k^*}\right)z_t = 0$$

O bien

$$\left[a_1\gamma - (1-\delta) - \left(\frac{y^*}{k^*}\right)\alpha\right]\widetilde{k}_t$$

$$- \left(\frac{y^*}{k^*}\right)(1-\alpha)\,\widetilde{l}_t + \left(\frac{c^*}{k^*}\right)\widetilde{c}_t + \left(\gamma a_2 - \frac{y^*}{k^*}\right)z_t = 0 \quad (7)$$

La condición consumo-ocio en la ecuación (5) ya es estática

$$\alpha\widetilde{k}_t - \left[\alpha + \frac{l^*}{1-l^*}\right]\widetilde{l}_t - \widetilde{c}_t + z_t = 0 \quad (8)$$

Resolviendo (7) y (8) simultaneamente, podemos obtener $\widetilde{c}_t$ y $\widetilde{l}_t$ como funciones lineales de $\widetilde{k}_t$ y z_t, digamos

$$\widetilde{c}_t = b_1\widetilde{k}_t + b_2 z_t$$

$$\widetilde{l}_t = d_1\widetilde{k}_t + d_2 z_t$$

Nótese que los coeficientes b_1, b_2, d_1 y d_2 son funciones de a_1 y a_2, además de los parámetros conocidos del modelo

Reemplazando $\widetilde{c}_t$, $\widetilde{c}_{t+1}$ y $\widetilde{l}_{t+1}$ en la ecuación de Euler (6), tenemos

$$-(1-\alpha)\,\psi E_t\widetilde{k}_{t+1} + (1-\alpha)\,\psi E_t\left[d_1\widetilde{k}_{t+1} + d_2 z_{t+1}\right]$$
$$-E_t\left[b_1\widetilde{k}_{t+1} + b_2 z_{t+1}\right] + \psi E_t z_{t+1} + \left[b_1\widetilde{k}_t + b_2 z_t\right] = 0$$

es decir

$$\left[(1-\alpha)\,\psi d_1 - (1-\alpha)\,\psi - b_1\right] E_t\widetilde{k}_{t+1}$$
$$+\left[(1-\alpha)\,\psi d_2 - b_2 + \psi\right] E_t z_{t+1} + b_1\widetilde{k}_t + b_2 z_t = 0$$

o, puesto que el proceso estocástico implica $E_t z_{t+1} = \rho z_t$

$$\left[(1-\alpha)\psi d_1 - (1-\alpha)\psi - b_1\right] E_t \widetilde{k}_{t+1}$$
$$+\left[(1-\alpha)\psi d_2 - b_2 + \psi\right]\rho z_t + b_1 \widetilde{k}_t + b_2 z_t = 0$$

La regla óptima que satisface esta ecuación es

$$\widetilde{k}_{t+1} = \left\{\frac{b_1}{(1-\alpha)\psi + b_1 - (1-\alpha)\psi d_1}\right\}\widetilde{k}_t$$
$$+\left\{\frac{\left[(1-\alpha)\psi d_2 - b_2 + \psi\right]\rho + b_2}{(1-\alpha)\psi + b_1 - (1-\alpha)\psi d_1}\right\} z_t$$

Por lo tanto,

$$a_1 = \frac{b_1(a_1,a_2)}{(1-\alpha)\psi + b_1(a_1,a_2) - (1-\alpha)\psi d_1(a_1,a_2)}$$

y

$$a_2 = \frac{\left[(1-\alpha)\psi d_2(a_1,a_2) - b_2(a_1,a_2) + \psi\right]\rho + b_2(a_1,a_2)}{(1-\alpha)\psi + b_1(a_1,a_2) - (1-\alpha)\psi d_1(a_1,a_2)}$$

definen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, a_1 y a_2

Una vez hallados estos coeficientes, podemos encontrar b_1, b_2, d_1 y d_2

`Simulación y Funciones Impulso-Respuesta`

La solución del modelo log-linearizado nos arroja las siguientes reglas de decisión óptimas lineales

$$\widetilde{k}_{t+1} = a_1 \widetilde{k}_t + a_2 z_t$$

$$\widetilde{c}_t = b_1 \widetilde{k}_t + b_2 z_t$$

$$\widetilde{l}_t = d_1 \widetilde{k}_t + d_2 z_t$$

de donde podemos deducir también usando (1)

$$\begin{aligned} \widetilde{y}_t &= z_t + \alpha \widetilde{k}_t + (1-\alpha) \widetilde{l}_t \\ &= [\alpha + (1-\alpha) d_1] \widetilde{k}_t + [1 + d_2] z_t \end{aligned}$$

De manera similar para $\widetilde{w}_t$, $\widetilde{r}_t$ y otras variables de interés

Iterando en

$$\widetilde{k}_{t+1} = a_1 \widetilde{k}_t + a_2 z_t$$

$$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon^z_{t+1}$$

podemos simular una secuencia arbitrariamente larga de valores para $\widetilde{k}_t$ y z_t, partiendo de $\widetilde{k}_0$ y z_0 dados y tomando una secuencia de realizaciones para los choques ε^z_t

Normalmente se parte del estado estacionario determinístico, en donde por definición $\widetilde{k}_0 = z_0 = 0$

Una vez obtenidas estas secuencias, podemos simular las secuencias correspondientes para $\widetilde{c}_t$, $\widetilde{l}_t$, $\widetilde{y}_t$, etc., y calcular los estadísticos que caracterizan los ciclos económicos en el modelo (S.D, correlaciones, etc.)

Para entender los mecanismos de transmisión del modelo, resulta útil hacer el siguiente experimento:

Partiendo nuevamente del estado estacionario ($\widetilde{k}_0 = z_0 = 0$), suponga que

- En el período inicial tenemos un choque positivo $\varepsilon_1^z > 0 \Longrightarrow z_1 > 0$

- En los períodos siguientes, $\varepsilon_2^z = \varepsilon_3^z = \varepsilon_4^z ... = 0$

Las trayectorias correspondientes para $\widetilde{k}_t$, z_t, $\widetilde{c}_t$, $\widetilde{l}_t$, $\widetilde{y}_t$, etc., muestran la respuesta dinámica de estas variables ante un único choque en el período inicial (funciones *impulso-respuesta*)

PROBLEMAS SELECCIONADOS

1. Resolviendo el modelo de ciclos económicos reales log-linearizado

Considere el modelo de ciclos económicos reales con función de utilidad logarítmica, tecnología Cobb-Douglas y condiciones de primer orden:

$$\frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{1}{c_t}\right) = E_t\left\{\frac{1}{c_{t+1}}\left[r_{t+1} + (1-\delta)\right]\right\}$$

$$(1-\phi)\frac{1}{c_t} = \frac{\phi\left(\frac{1}{1-l_t}\right)}{w_t}$$

$$c_t = y_t - \gamma k_{t+1} + (1-\delta)\,k_t$$

más la función de producción estocástica

$$y_t = e^{z_t} k_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha} \qquad z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_{t+1}^z \qquad \varepsilon_t^z \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

y los precios

$$w_t = (1-\alpha)\, e^{z_t} k_t^{\alpha} l_t^{-\alpha} \qquad r_t = \alpha e^{z_t} k_t^{\alpha-1} l_t^{1-\alpha}$$

i) Encuentre los valores del estado estacionario determinístico del modelo (con $\varepsilon_t^z = z_t = 0$, $\forall t$) para las variables k^*, l^*, c^*, y^*, w^* y r^* como función únicamente de los parámetros del modelo $(\beta, \gamma, \phi, \delta, \alpha)$

ii) Muestre que log-linearizando en torno al estado estacionario las condiciones de primer orden del modelo obtenemos la condición de factibilidad

$$\gamma\widetilde{k}_{t+1} - \left[(1-\delta) + \left(\frac{y^*}{k^*}\right)\alpha\right]\widetilde{k}_t - \left(\frac{y^*}{k^*}\right)(1-\alpha)\,\widetilde{l}_t + \left(\frac{c^*}{k^*}\right)\widetilde{c}_t - \left(\frac{y^*}{k^*}\right) z_t = 0$$

la condición estática consumo-ocio

$$\alpha\widetilde{k}_t - \left[\alpha + \frac{l^*}{1-l^*}\right]\widetilde{l}_t - \widetilde{c}_t + z_t = 0$$

y la ecuación de Euler estocástica

$$-(1-\alpha)\,\psi E_t\widetilde{k}_{t+1} + (1-\alpha)\,\psi E_t\widetilde{l}_{t+1} - E_t\widetilde{c}_{t+1} + \psi E_t z_{t+1} + \widetilde{c}_t = 0$$

con $\psi \equiv \frac{r^*}{r^*+(1-\delta)}$

iii) Asuma la siguientes regla de decisión óptima

$$\widetilde{k}_{t+1} = a_1\widetilde{k}_t + a_2 z_t$$

Usando esta regla y las primeras dos ecuaciones del sistema anterior, encuentre $\widetilde{l}_t$ y $\widetilde{c}_t$ como reglas lineales de las variables de estado. Es decir, encuentre los coeficientes b_1, b_2, d_1 y d_2 tales que

$$\widetilde{c}_t = b_1\widetilde{k}_t + b_2 z_t \qquad \widetilde{l}_t = d_1\widetilde{k}_t + d_2 z_t$$

satisfagan dichas ecuaciones. Estos cuatro coeficientes deben quedar expresados como función únicamente de los parámetros del modelo, más a_1 y a_2

iv) Reemplazando los resultados del inciso anterior en la versión log-linearizada de la ecuación de Euler, encuentre un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en los coeficientes a_1 y a_2. Resuelva este sistema y encuentre expresiones para a_1 y a_2 como función únicamente de los parámetros del modelo. ¿Cómo eligen una de las dos raíces en la ecuación cuadrática correspondiente?

2. Resolviendo numéricamente el modelo de ciclos económicos reales

Usando las reglas de decisión obtenidas en la pregunta anterior y los siguientes valores de los parámetros:

$$\beta = 0.987 \quad \gamma = 1.028 \quad \phi = 0.64 \quad \delta = 0.012$$

$$\alpha = 0.4 \quad \rho = 0.95 \quad \sigma = 0.007$$

y partiendo de un estado estacionario ($\widetilde{k}_0 = z_0 = 0$), respondan a las siguientes preguntas numéricas. Para ello pueden usar Excel o bien algún programa más avanzado como Matlab

i) Dado el valor de ρ y σ, genere una secuencia larga (5000 períodos) de realizaciones de las innovaciones ε_t^z y del choque tecnológico z_t.

ii) Dados los valores de $\widetilde{k}_0$ y la secuencia de realizaciones de z_t encontrada en el inciso anterior, construya y grafique la secuencia correspondiente para el capital (en log-desviaciones del estado estacionario), también por 5000 períodos. Construya y grafique las secuencias correspondientes para el consumo, el empleo, la inversión y el producto, también en log-desviaciones del estado estacionario y por 5000 períodos

iii) Eliminando los primeros 2000 períodos de las series obtenidas en el inciso anterior, calcule la varianza de $\widetilde{y}_t$, $\widetilde{c}_t$, $\widetilde{l}_t$ e $\widetilde{i}_t$, y las correlación entre $\widetilde{c}_t$ e $\widetilde{y}_t$, $\widetilde{l}_t$ e $\widetilde{y}_t$ y finalmente $\widetilde{i}_t$ e $\widetilde{y}_t$

iv) Finalmente, grafique las funciones de impulso-respuesta para $\widetilde{y}_t$, $\widetilde{c}_t$, $\widetilde{l}_t$ e $\widetilde{i}_t$ ante un choque tecnológico positivo en el período 0 de dos desviaciones estándar (es decir, $\varepsilon_0^z = 2\sigma$, $\varepsilon_t^z = 0 \ \forall t > 0$). ¿Qué información sobre el funcionamiento del modelo pueden extraer de esas funciones impulso-respuesta?