CURSO DE MACROECONOMIA ABIERTA

"MODELOS REALES DE COMERCIO INTERTEMPORAL"

CONTENIDO

Cada sección incluye algunos Problemas Seleccionados.

I. INTRODUCCION A LOS MODELOS DE COMERCIO INTERTEMPORAL

`Modelo Simple de Dos Períodos`

Supuestos:

- Sólo dos períodos (corriente y futuro)

- Una sola mercancía en dotación fija

- No hay producción ni factores productivos (capital, trabajo)

- Tampoco hay dinero

Y_1, Y_2: dotaciones de producto (PIB) en cada período

El agente representativo:

- Recibe Y_1 e Y_2 como ingreso en cada período

- Escoge su consumo C_1 y C_2 en cada período

En una economía cerrada: $C_1 = Y_1$, $C_2 = Y_2$

Analizaremos una economía pequeña y abierta, que enfrenta una tasa de interés internacional r^*

Restricción presupuestaria:

$$C_1 + S = Y_1$$

$$C_2 = Y_2 + (1 + r^*)\, S$$

S: ahorro nacional

Combinando ambas ecuaciones y eliminando S, obtenemos la restricción presupuestaria intertemporal

$$C_1 + \frac{C_2}{1 + r^*} = Y_1 + \frac{Y_2}{1 + r^*}$$

Nótese que la cuenta de capitales de esta economía está dada por

$$KA_1 = -S \qquad KA_2 = S$$

$\Rightarrow$ A nivel agregado, la economía solo puede ahorrar prestando al exterior

Pero la cuenta corriente es el espejo de la balanza de capitales

$$CA_1 = S = Y_1 - C_1$$

$$CA_2 = -S = Y_2 - C_2 + r^* S$$

$\Rightarrow$ Prestar al exterior implica una exportación neta de bienes o servicios

El enfoque intertemporal de la cuenta corriente enfatiza la cuenta de capitales, entendida como *comercio intertemporal*:

- Algunos países exportan el bien presente e importan el bien futuro

  Es decir, estos países prestan su ahorro al resto del mundo, generando un déficit en la cuenta de capitales y un superávit en la cuenta corriente

  En el futuro, el flujo de capitales se revierte, generando un déficit en la cuenta corriente

- Lo contrario ocurrirá con países que exportan el bien futuro e importan el bien presente

Por lo tanto, en el modelo con dotaciones de ingreso dadas, la cuenta corriente está determinada por la decisión entre consumo presente y futuro

El agente representativo

- Tiene preferencias entre consumo presente y futuro descritas por la función de utilidad:

  $$U_1 = u(C_1) + \beta u(C_2)$$

  en donde $u(C)$ es creciente y cóncava ($u' > 0$, $u'' < 0$), factor de descuento $0 < \beta < 1$

- Resuelve el problema de optimización

$$\max \{u(C_1) + \beta u(C_2)\}$$

$$s.t. \qquad C_1 + S = Y_1$$

$$C_2 = Y_2 + (1 + r^*) S$$

con Lagrangeano

$$L = u(C_1) + \beta u(C_2) - \lambda_1 [C_1 + S - Y_1] - \lambda_2 [C_2 - Y_2 - (1 + r^*) S]$$

Resolviendo las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial L}{\partial C_1} = u'(C_1) - \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_2} = \beta u'(C_2) - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial S} = -\lambda_1 + \lambda_2 (1 + r^*) = 0$$

obtenemos la *ecuación de Euler*:

$$\frac{u'(C_1)}{\beta u'(C_2)} = 1 + r^*$$

$$\frac{u'(C_1)}{\beta u'(C_2)} = 1 + r^*$$

- $\beta(1 + r^*) = 1 \Rightarrow C_1 = C_2$ (consumo alisado)

- $\beta(1 + r^*) > 1 \Rightarrow C_1 < C_2$

- $\beta(1 + r^*) < 1 \Rightarrow C_1 > C_2$

Con una función de utilidad logarítmica, tenemos

$$\frac{C_2}{C_1} = \beta(1 + r^*)$$

junto con la restricción presupuestaria intertemporal

$$C_1 + \frac{C_2}{1 + r^*} = Y_1 + \frac{Y_2}{1 + r^*}$$

Combinando, obtenemos la *función consumo*:

$$C_1 = \frac{1}{1 + \beta}\left[Y_1 + \frac{Y_2}{1 + r^*}\right]$$

$\Rightarrow$ El consumo corriente es una función del ingreso permanente

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} CA_1 &= Y_1 - C_1 \\ &= \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) Y_1 - \left(\frac{1}{1+\beta}\right) \left[\frac{Y_2}{1+r^*}\right] \end{aligned}$$

- Un aumento en el ingreso presente ($Y_1 \uparrow$) mejora la cuenta corriente
- Un aumento en el ingreso futuro ($Y_2 \uparrow$) deteriora la cuenta corriente
- Un aumento en la tasa de interés internacional ($r^* \uparrow$) mejora la cuenta corriente

`Modelo con Gasto de Gobierno`

El gobierno gasta en cada período y recauda impuestos de suma fija

Restricción presupuestaria del gobierno:

$$G_1 + \frac{G_2}{1+r^*} = T_1 + \frac{T_2}{1+r^*}$$

$G_1 - T_1$: déficit fiscal, financiado mediante préstamos del exterior

Restricción presupuestaria del agente representativo:

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r^*} = (Y_1 - T_1) + \frac{(Y_2 - T_2)}{1+r^*} = (Y_1 - G_1) + \frac{(Y_2 - G_2)}{1+r^*}$$

La ecuación de Euler no cambia, pues los impuestos de suma fija no son distorsionantes

Con la función de utilidad logarítmica, el consumo presente está dado por

$$C_1 = \frac{1}{1+\beta}\left[(Y_1 - G_1) + \frac{(Y_2 - G_2)}{1+r^*}\right]$$

y la cuenta corriente

$$CA_1 = Y_1 - C_1 - G_1$$

$$= \underbrace{\underbrace{(Y_1 - T_1 - C_1)}_{S_p} - \underbrace{(G_1 - T_1)}_{DEF}}_{S}$$

De donde

$$CA_1 = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)(Y_1 - G_1) - \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left[\frac{Y_2 - G_2}{1+r^*}\right]$$

- Un aumento en el gasto de gobierno presente ($G_1 \uparrow$) deteriora la cuenta corriente

- Un aumento en el gasto de gobierno futuro ($G_2 \uparrow$) mejora la cuenta corriente

Nótese que la secuencia de impuestos (T_1, T_2)

- Determina el déficit fiscal de cada período
- Es irrelevante en términos del consumo y la cuenta corriente (*Equivalencia Ricardiana*)

`Modelo con Inversión`

Supogamos ahora que el PIB es producido de acuerdo a la función de producción:

$$Y = F(K, L) = f(K) \text{ con } L = \bar{L}$$

Restricción presupuestaria:

$$C_1 + \underbrace{K_2 + S^*}_{S} = f(K_1)$$

$$C_2 = f(K_2) + (1 + r^*) S^*$$

Por simplicidad, supondremos que el capital se deprecia totalmente entre períodos $(I = K_2)$

Problema del agente representativo

$$\max \{u(C_1) + \beta u(C_2)\}$$

$$s.t. \qquad C_1 + K_2 + S^* = f(K_1)$$

$$C_2 = f(K_2) + (1 + r^*) S^*$$

con Lagrangeano

$$\begin{aligned} L &= u(C_1) + \beta u(C_2) - \lambda_1 [C_1 + K_2 + S^* - f(K_1)] \\ &\quad -\lambda_2 [C_2 - f(K_2) - (1 + r^*) S^*] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= u(C_1) + \beta u(C_2) - \lambda_1 [C_1 + K_2 + S^* - f(K_1)] \\ &\quad -\lambda_2 [C_2 - f(K_2) - (1 + r^*) S^*] \end{aligned}$$

Condiciones de primer orden

$$\frac{\partial L}{\partial C_1} = u'(C_1) - \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_2} = \beta u'(C_2) - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial S^*} = -\lambda_1 + \lambda_2 (1 + r^*) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_2} = -\lambda_1 + \lambda_2 f'(K_2) = 0$$

Estas condiciones se reducen a la ecuación de Euler habitual

$$\frac{u'(C_1)}{\beta u'(C_2)} = 1 + r^*$$

y la condición de no arbitraje entre capital físico y financiero

$$f'(K_2) = 1 + r^*$$

Con utilidad logarítmica y función de producción Cobb-Douglas $f(K_i) = A_i K_i^{\alpha}$, tenemos

$$\frac{C_2}{C_1} = \beta(1 + r^*)$$

y

$$\alpha A_2 K_2^{\alpha-1} = 1 + r^*$$

En una economía pequeña y abierta, la inversión sólo depende de la tecnología y la tasa de interés internacional, no de las preferencias

Usando la restricción presupuestaria intertemporal

$$C_1 + K_2 + \frac{C_2}{1 + r^*} = f(K_1) + \frac{f(K_2)}{1 + r^*}$$

obtenemos la función consumo

$$C_1 = \frac{1}{1+\beta}\left[f(K_1) - K_2 + \frac{f(K_2)}{1 + r^*}\right]$$

y la ecuación de la cuenta corriente

$$CA_1 = \underbrace{f(K_1) - C_1}_{S} - \underbrace{K_2}_{I}$$

$$= \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)[f(K_1) - K_2] - \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left[\frac{f(K_2)}{1 + r^*}\right]$$

Usando la condición de no arbitraje, obtenemos finalmente

$$CA_1 = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\left[A_1 K_1^{\alpha} - \left(\frac{\alpha A_2}{1+r^*}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right] - \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left[\frac{A_2\left(\frac{\alpha A_2}{1+r^*}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1+r^*}\right]$$

Vemos que

- Un aumento en la productividad presente ($A_1 \uparrow$) mejora la cuenta corriente

- Un aumento en la productividad futura ($A_2 \uparrow$) deteriora la cuenta corriente por dos razones

  a) reduce el ahorro; b) aumenta la inversión

`Modelo con Dos Países`

Y_1^i, Y_2^i: dotaciones de producto (PIB) en cada período y en cada país ($i = 1, 2$)

El agente representativo de cada país:

- Recibe Y_1^i e Y_2^i como ingreso en cada período

- Escoge su consumo C_1^i y C_2^i en cada período

Suponemos que los dos países tienen las mismas preferencias (logarítmicas)

Abandonando el supuesto de economía pequeña, la tasa de interés internacional r^* es endógena

Resolviendo el problema de maximización del agente representativo en cada país, obtenemos como antes la ecuación de Euler:

$$\frac{C_2^i}{C_1^i} = \beta\left(1 + r^*\right)$$

de donde la tasa de crecimiento del consumo

$$C_2^1/C_1^1 = C_2^2/C_1^2$$

es la misma en los dos países

Combinando la ecuación de Euler con la restricción presupuestaria intertemporal:

$$C_1^i + \frac{C_2^i}{1 + r^*} = Y_1^i + \frac{Y_2^i}{1 + r^*}$$

obtenemos para cada país la función consumo

$$C_1^i = \frac{1}{1+\beta}\left[Y_1^i + \frac{Y_2^i}{1 + r^*}\right]$$

y la ecuación de la cuenta corriente

$$CA_1^i = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)Y_1^i - \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left[\frac{Y_2^i}{1 + r^*}\right]$$

Ambas dependen de la tasa de interés internacional

Para hallar r^*, usamos la condición de equilibrio de la economía mundial

$$CA_1^1 + CA_1^2 = 0$$

es decir

$$\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)Y_1^1-\left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left[\frac{Y_2^1}{1+r^*}\right]=\left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left[\frac{Y_2^2}{1+r^*}\right]-\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)Y_1^2$$

de donde

$$1+r^*=\left(\frac{1}{\beta}\right)\left[\frac{Y_2^1+Y_2^2}{Y_1^1+Y_1^2}\right]$$

luego

$$C_1^i=\frac{1}{1+\beta}\left[Y_1^i+\beta\left(\frac{Y_1^1+Y_1^2}{Y_2^1+Y_2^2}\right)Y_2^i\right]$$

y

$$CA_1^i=\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\left[Y_1^i-\left(\frac{Y_1^1+Y_1^2}{Y_2^1+Y_2^2}\right)Y_2^i\right]$$

Por lo tanto, una caída en el ingreso corriente de un país ($Y_1^1 \downarrow$)

- Reduce el consumo corriente en dicho país ($C_1^1 \downarrow$) y el ahorro
- Deteriora la cuenta corriente en dicho país ($CA_1^1 \downarrow$)
- Aumenta la tasa de interés internacional ($r^* \uparrow$)
- Reduce el consumo corriente en el otro país ($C_1^2 \downarrow$)
- Mejora la balanza comercial del otro país ($CA_1^2 \uparrow$)

De otro lado, una caída en el ingreso futuro de un país ($Y_2^1 \downarrow$)

- Reduce el consumo en dicho país ($C_1^1 \downarrow$), pero aumenta el ahorro
- Mejora la cuenta corriente en dicho país ($CA_1^1 \uparrow$)
- Reduce la tasa de interés internacional ($r^* \downarrow$)
- Aumenta el consumo corriente en el otro país ($C_1^2 \uparrow$)
- Deteriora la balanza comercial del otro país ($CA_1^2 \downarrow$)

PROBLEMAS SELECCIONADOS

1. *Choques Tecnológicos y Cuenta Corriente*

Considere el modelo de comercio intertemporal visto en clase, con sólo un país, sin gasto de gobierno, pero con inversión. Suponga que la función de producción está dada por:

$$Y_t = \theta_t K_t^{\alpha}$$

con $\alpha = \frac{1}{2}$, y que incialmente $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. Derive expresiones para el PIB y la cuenta corriente en el primer período (como función de θ, entre otros). Ahora suponga que tenemos un choque tecnológico del tipo

$$(\theta_2 - \theta) = \rho\,(\theta_1 - \theta)$$

con $\theta_1 > \theta$. Derive nuevamente expresiones para el PIB y la cuenta corriente en el período1 como función de θ, θ_1 y ρ, entre otros.

(i) Si $\rho = 0$, el shock tecnológico es temporal (sólo ocurre en el período 1). Muestre que en este caso la cuenta corriente es procíclica, es decir que se mueve en la misma dirección que el PIB.

(ii) Si $\rho = 1$, el shock tecnológico es permanente (ocurre con igual fuerza en los dos períodos). Derive una condición suficiente para que la cuenta corriente sea anticíclica, es decir que se mueva en dirección contraria al PIB.

(iii) Interprete la condición obtenida en (ii). Es decir, explique cuales son los parámetros clave para entenderla, y en qué casos es más probable que se cumpla.

2. *Impuestos Distorsionantes y Equivalencia Ricardiana*

Considere el modelo de comercio intertemporal con inversión, gasto de gobierno, y un solo país. Suponga que la producción (o el ingreso) de la economía doméstica esta dado por la función de producción:

$$Y_t = AK_t^{\alpha} \qquad t = 1, 2$$

con K_1 exógenamente dado y K_2 igual a la inversión realizada en el primer período. El gobierno financia una secuencia exógena de gasto (G_1, G_2) mediante impuestos proporcionales al ingreso del agente representativo (τ_1, τ_2), de acuerdo con la restricción presupuestaria intertemporal:

$$G_1 + \frac{1}{1+r^*}G_2 = \tau_1 \left(AK_1^{\alpha}\right) + \frac{1}{1+r^*}\tau_2 \left(AK_2^{\alpha}\right)$$

El agente representativo toma las decisiones de consumo, producción e inversión, maximizando su utilidad intertemporal:

$$\log\left(C_1\right) + \beta \log\left(C_2\right)$$

Tanto el gobierno como el agente representativo pueden prestar (o pedir prestado) sin límites en el mercado internacional, a la tasa de interés mundial exógena r^*.

(i) Encuentre la inversión óptima (K_2), la función consumo (C_1), y la cuenta corriente (CA_1) para esta economía;

(ii) Analice el impacto de una reducción de impuestos en el primer período ($\tau_1 \downarrow$), manteniendo el gasto de gobierno (G_1, G_2) constante, sobre estas tres variables; y

(iii) ¿Se cumple la Equivalencia Ricardiana en esta versión del modelo? Explique.

3. *Un Ejemplo Numérico con dos Países*

Considere el modelo de comercio intertemporal con dos países, inversión y gato de gobierno. La función de utilidad en cada país i está dada por:

$$U_1^i = \log\left(C_1^i\right) + \beta \log\left(C_2^i\right)$$

y la función de producción del período t, por:

$$Y_t^i = \theta_t^i \left(K_t^i\right)^\alpha$$

Dados los siguientes parámetros

$$\alpha = 0.4 \qquad \beta = 0.9 \qquad \theta_1^1 = \theta_2^1 = \theta_1^2 = \theta_2^2 = 5$$

los siguientes valores del capital inicial para cada país

$$K_1^1 = 4 \qquad K_1^2 = 10$$

el gasto de gobierno en el país 1

$$G_1^1 = 5 \qquad G_2^1 = 5$$

y en el país 2

$$G_1^2 = 8 \qquad G_2^2 = 8$$

(i) Encuentre numéricamente la tasa de interés mundial que equilibra la economía mundial (r^*). Dada esa tasa de interés, encuentre el consumo, la inversión y la cuenta corriente para cada país y en cada período.

(ii) Suponga que el gobierno del país 2 decide aumentar su gasto corriente a $G_1^2 = 9$. Rehaga los cálculos pedidos en el inciso (i) y comente las diferencias en los resultados.

(iii) Suponga ahora que un terremoto destruye la mitad del capital inicial del país 1, manteniendo $G_1^2 = 8$. Rehaga los cálculos pedidos en el inciso (i) y comente las diferencias en los resultados.

(iv) Rehaga los cálculos pedidos en el inciso (i) con $K_1^1 = 4$ y $G_1^2 = 8$, pero con distintos valores de la productividad futura del país 1, manteniendo el resto de parámetros constantes. Grafique la tasa de interés mundial como función de θ_2^1

II. IMPERFECCIONES EN LOS MERCADOS DE CAPITALES

Veremos algunos modelos simples de comercio intertemporal con inversión y mercados de crédito imperfectos

Combinando estos modelos, podemos obtener:

- Diferencias en las tasas de interés reales entre países
- Una correlación positiva entre el ahorro doméstico y la inversión

... pese a que seguimos suponiendo economías pequeñas y abiertas

`Restricciones Crediticias`

El modelo más simple asume que la economía tiene un monto máximo ϕ que puede pedir prestado en el mercado mundial a la tasa de interés exógena r^*

Por encima de ese límite, el país no puede pedir prestado a ninguna tasa de interés

Problema del agente representativo

$$\max \{u(C_1) + \beta u(C_2)\}$$

$$\begin{aligned} s.t. \qquad C_1 + K_2 + S^* &= f(K_1) \\ C_2 &= f(K_2) + (1 + r^*) S^* \\ S^* &\geq -\phi \end{aligned}$$

Lagrangeano

$$\begin{aligned} L \;=\; & u(C_1) + \beta u(C_2) - \lambda_1 [C_1 + K_2 + S^* - f(K_1)] \\ & - \lambda_2 [C_2 - f(K_2) - (1 + r^*) S^*] + \lambda_3 [S^* + \phi] \end{aligned}$$

Condiciones de primer orden

$$\frac{\partial L}{\partial C_1} = u'(C_1) - \lambda_1 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial C_2} = \beta u'(C_2) - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial S^*} = -\lambda_1 + \lambda_2 (1 + r^*) + \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_2} = -\lambda_1 + \lambda_2 f'(K_2) = 0$$

más la condición de Kuhn-Tucker

$$\lambda_3 [S^* + \phi] = 0 \qquad \text{con } \lambda_3 > 0 \text{ si } S^* = -\phi$$

Estas condiciones se reducen a una nueva ecuación de Euler

$$\frac{u'(C_1)}{\beta u'(C_2)} = 1 + r^* + \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$$

y la nueva condición de no arbitraje entre capital físico y financiero

$$f'(K_2) = 1 + r^* + \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$$

Si la restricción crediticia está activa ($S^* = -\phi$), entonces

$$f'(K_2) > 1 + r^*$$

se invierte un monto subópitmo

¿Cómo hallamos la inversión en este caso?

Si la restricción está activa, tenemos además

$$K_2 = \underbrace{f(K_1) - C_1}_{S} + \phi$$

Nótese que en este caso la inversión depende del ahorro doméstico

Con una función de utilidad logarítmica, la función consumo es ahora

$$C_1 = \frac{1}{1 + \beta\left(\frac{f'(K_2)}{1+r^*}\right)}\left[f(K_1) - K_2 + \frac{f(K_2)}{1 + r^*}\right]$$

Reemplazando

$$K_2 = f(K_1) + \phi - \frac{f(K_1) - K_2 + \frac{f(K_2)}{1+r^*}}{1 + \beta\left(\frac{f'(K_2)}{1+r^*}\right)}$$

esta ecuación nos da el valor de equilibrio de la inversión, cuando la restricción crediticia está activa

Con una función de producción Cobb-Douglas

$$K_2 = A_1 K_1^{\alpha} + \phi - \frac{A_1 K_1^{\alpha} - K_2 + \frac{A_2 K_2^{\alpha}}{1+r^*}}{1 + \beta \left(\frac{\alpha A_2 K_2^{\alpha - 1}}{1+r^*} \right)}$$

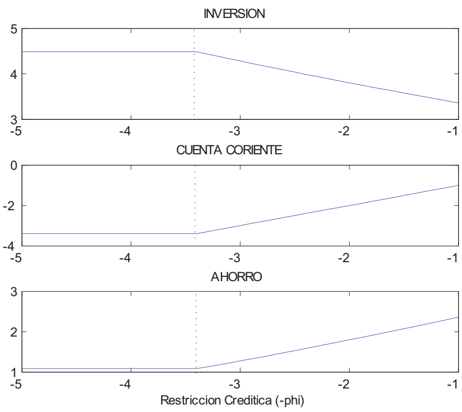
Vamos a ver un ejemplo numérico para entender mejor el funcionamiento del modelo, partiendo de la siguiente situación

$$\alpha = 0.3 \quad \beta = 0.9 \quad r^* = 0.05 \quad K_1 = 3$$

$$A_1 = A_2 = 10 \quad \phi = 5$$

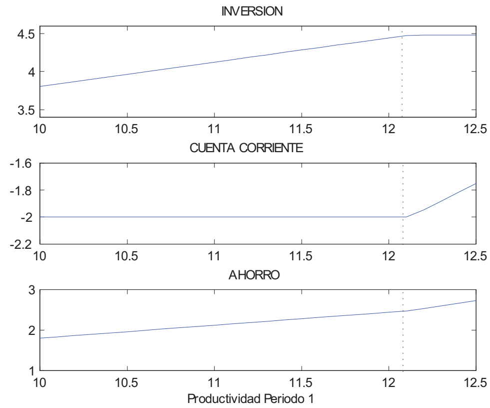
En el equilibrio inicial, $CA_1 = S^* = -3.4$, luego la restricción de crédito no está activa

Experimento 1: Reducir el límite de endeudamiento ϕ



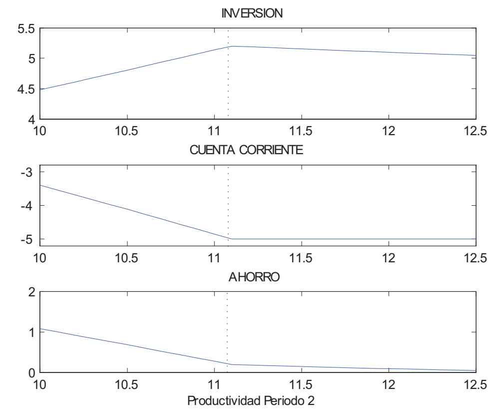
Al reducirse el límite de endeudamiento, eventualmente la restricción se vuelve activa. La inversión cae por debajo del nivel óptimo, pese a que el ahorro aumenta para sostener la inversión

Partiendo ahora de un equilibrio en el que la restricción crediticia está activa ($\phi = 2$), el segundo experimento es aumentar A_1



Cuando la restricción está activa, el ahorro y la inversión se encuentran correlacionados; mayor ingreso hoy implica un mayor ahorro, lo que permite financiar una mayor inversión

Finalmente, partiendo del equilibrio inicial en el cual la restricción no está activa ($\phi = 5$), el tercer experimento es aumentar A_2



Al aumentar los incentivos para la inversión, la economía necesita endeudarse cada vez más. Eventualmente se llega al límite dado por la restricción crediticia

`Incertidumbre y Riesgo País`

Dejando de lado la restricción crediticia, supongamos ahora que la inversión tiene un riesgo

- Con probabilidad θ, la inversión es exitosa y se produce en el segundo período $f(K_2)$

- Con probabilidad $1-\theta$, la inversión fracasa y en el segundo período no se produce nada

La economía doméstica pide prestado D^* para financiar la inversión, y ahorra S^* para asegurar el consumo en el segundo caso

Supondremos que en el segundo caso el país se ve imposibilitado de devolver el préstamo (*default*)

Problema del agente: maximizar su *utilidad esperada*

$$\max\left\{u(C_1)+\beta\left[\theta u\left(C_2^{nd}\right)+(1-\theta)u\left(C_2^{d}\right)\right]\right\}$$

$$s.t. \qquad C_1+K_2+S^*=f(K_1)+D^*$$

$$C_2^{nd}=f(K_2)+(1+r^*)S^*-(1+\widehat{r})D^*$$

$$C_2^{d}=(1+r^*)S^*$$

$$S^*\geq 0 \qquad D^*\geq 0$$

en donde r^* es la tasa de interés (exógena) a la que puede ahorrar en el mercado internacional, y $\widehat{r}$ es una tasa de interés específica del país (endógena) a la puede pedir prestado en ese mismo mercado

Con K_1 suficientemente chico y $u'(0)$ suficientemente grande, garantizamos que $S^*>0$ y $D^*>0$

Lagrangeano

$$L = u(C_1) + \beta \left[\theta u \left(C_2^{nd} \right) + (1-\theta) u \left(C_2^d \right) \right]$$

$$-\lambda_1 \left[C_1 + K_2 + S^* - f(K_1) - D^* \right]$$

$$-\lambda_2^{nd} \left[C_2^{nd} - f(K_2) - (1+r^*) S^* + (1+\widehat{r}) D^* \right]$$

$$-\lambda_2^d \left[C_2^d - (1+r^*) S^* \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_1} = u'(C_1) - \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_2^{nd}} = \beta \theta u' \left(C_2^{nd} \right) - \lambda_2^{nd} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_2^d} = \beta (1-\theta) u' \left(C_2^d \right) - \lambda_2^d = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial S^*} = -\lambda_1 + \left(\lambda_2^{nd} + \lambda_2^d \right) (1+r^*) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial D^*} = \lambda_1 - \lambda_2^{nd} (1+\widehat{r}) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_2} = -\lambda_1 + \lambda_2^{nd} f'(K_2) = 0$$

Estas condiciones se reducen a las ecuaciones de Euler

$$\frac{u'(C_1)}{\beta\left[\theta u'\left(C_2^{nd}\right)+(1-\theta)\,u'\left(C_2^{d}\right)\right]}=1+r^*$$

$$\frac{u'(C_1)}{\beta u'\left(C_2^{nd}\right)}=\theta\left(1+\widehat{r}\right)$$

y la condición de no arbitraje entre capital físico y financiero

$$f'(K_2)=1+\widehat{r}$$

Nótese que estas dos últimas condiciones dependen de $\widehat{r}$, no de r^*

¿Cómo encontramos esa tasa de interés a la cual puede pedir prestada la economía doméstica?

Los intermediarios financieros piden prestado a la tasa internacional r^*, pero prestan a la economía doméstica a una tasa $\widehat{r}$ que satisface la condición de beneficios esperados iguales a cero:

$$\theta\left(1+\widehat{r}\right)=1+r^*$$

Esta condición garantiza que no haya incentivos a la entrada de nuevos intermediarios, en un mercado que se asume competitivo

Por lo tanto

$$\widehat{r}=\frac{1+r^*}{\theta}-1=r^*+\underbrace{\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)(1+r^*)}_{\text{prima de riesgo}}$$

los intermediarios cobran una prima sobre la tasa de interés mundial que refleja el riesgo de impago (*riesgo país*)

Esto puede explicar por qué las tasas de interés son diferentes entre países

De la condición de no arbitraje

$$f'(K_2) = \frac{1+r^*}{\theta} > 1+r^*$$

tendremos nuevamente un monto subóptimo de inversión al encarecerse el crédito externo

De la segunda ecuación de Euler

$$u'(C_1) = \beta(1+r^*)\, u'\left(C_2^{nd}\right)$$

y reemplazando en la primera

$$\frac{u'\left(C_2^{nd}\right)}{\theta u'\left(C_2^{nd}\right) + (1-\theta)\, u'\left(C_2^{d}\right)} = 1$$

luego $C_2^{nd} = C_2^{d}$;la economía doméstica puede asegurarse contra el riesgo de la inversión mediante el ahorro externo (o reservas internacionales)

Con utilidad logarítmica podemos obtener la función consumo

$$C_1 = \frac{1}{1+\beta}\left[f(K_1) - K_2 + \theta\left(\frac{f(K_2)}{1+r^*}\right)\right]$$

que nos da el consumo de hoy como función del ingreso permanente esperado

La cuenta corriente estará dada entonces por

$$\begin{aligned} CA_1 &= S^* - D^* \\ &= \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)[f(K_1) - K_2] - \left(\frac{\theta}{1+\beta}\right)\frac{f(K_2)}{1+r^*} \end{aligned}$$

Un aumento en el riesgo país $(1-\theta)$: (i) Reduce el consumo y la inversión y (ii) Mejora la cuenta corriente, al aumentar el ahorro y reducir el endeudamiento externos

Por último, supongamos que la economía doméstica puede usar una fracción η de sus reservas internacionales como colateral

En ese caso

$$C_2^d = (1-\eta)(1+r^*)\, S^*$$

y, más importante, la condición de beneficios esperados igual a cero para los intermediarios sería ahora

$$\theta\,(1+\widehat{r}) + (1-\theta)\,\eta\,(1+r^*)\,\frac{S^*}{D^*} = 1 + r^*$$

de donde

$$\widehat{r} = r^* + \underbrace{\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)(1+r^*)\left(1-\eta\frac{S^*}{D^*}\right)}_{\text{prima de riesgo}}$$

La acumulación de reservas reduce el riesgo país y abarata el acceso al crédito externo

`Intermediarios Locales Monopolistas`

Dejando de lado restricciones crediticias e incertidumbre, otra imperfección en el mercado de capitales puede estar dada por la existencia de un sistema financiero local poco competitivo

El sistema financiero local intermedia recursos entre el agente representativo doméstico y el mercado de crédito mundial

Supondremos que existe un único intermediario quien tiene poder monopólico sobre el sistema financiero

- Pide prestado al mercado internacional a la la tasa exógena r^*

- Coloca esos recursos en el mercado local como préstamos, a una tasa de interés endógena $\widehat{r}$ que incluye su renta monopólica

Suponemos también que el agente representativo deben financiar toda su inversión mediante préstamos de este intermediario; no pueden usar ni su ingreso del primer período ni pedir prestado al mercado internacional

Sin embargo, le permitimos que acceda directamente al mercado de crédito internacional para ahorrar o para créditos de consumo

Problema del agente representativo:

$$\max \{u(C_1) + \beta u(C_2)\}$$

$$s.t. \qquad C_1 + S^* + K_2 = f(K_1) + D$$

$$C_2 = f(K_2) + (1 + r^*) S^* - (1 + \widehat{r}) D$$

$$K_2 \leq D$$

en donde D es el endeudamiento con respecto al intermediario local a la tasa de interés de monopolio $\widehat{r}$ (endógena). En equilibrio, $K_2 = D$ luego podemos reescribir el problema como:

$$\max \{u(C_1) + \beta u(C_2)\}$$

$$s.t. \qquad C_1 + S^* = f(K_1)$$

$$C_2 = f(K_2) + (1 + r^*) S^* - (1 + \widehat{r}) K_2$$

Lagrangeano

$$\begin{aligned} L &= u(C_1) + \beta u(C_2) - \lambda_1 [C_1 + S^* - f(K_1)] \\ &\quad -\lambda_2 [C_2 - f(K_2) - (1 + r^*) S^* + (1 + \widehat{r}) K_2] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_1} = u'(C_1) - \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_2} = \beta u'(C_2) - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial S^*} = -\lambda_1 + \lambda_2 (1 + r^*) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_2} = \lambda_2 \left[f'(K_2) - (1 + \widehat{r}) \right] = 0$$

Estas condiciones se reducen a la ecuación de Euler habitual

$$\frac{u'(C_1)}{\beta u'(C_2)} = 1 + r^*$$

y la condición de no arbitraje entre capital físico y financiero

$$f'(K_2) = 1 + \widehat{r}$$

La condicion de no arbitraje define una demanda por préstamos

$$K_2 = D(\widehat{r})$$

Por ejemplo, con función de producción Cobb-Douglas,

$$\alpha A K_2^{\alpha-1} = 1 + \widehat{r}$$

luego

$$K_2 = D\left(\widehat{r}\right) = \left(\frac{\alpha A}{1+\widehat{r}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Mientras mayor sea la tasa de interés cobrada por el intermediario local, menor será la cantidad demandada de crédito

El intermediario local actúa como un monopolista, eligiendo la tasa de interés $\widehat{r}$ que maximiza sus beneficios dada una demanda de crédito $D\left(\widehat{r}\right)$, la tasa de interés internacional a la cual pide prestado y un costo marginal κ

Problema:

$$\max_{\widehat{r}} \left\{\left(\widehat{r} - r^* - \kappa\right) D\left(\widehat{r}\right)\right\}$$

con condición de primer orden:

$$\left(\widehat{r} - r^* - \kappa\right) D'\left(\widehat{r}\right) + D\left(\widehat{r}\right) = 0$$

Reemplazando la demanda de crédito obtenida del problema del agente:

$$-(\widehat{r}-r^{*}-\kappa)\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\alpha A\left(\frac{\alpha A}{1+\widehat{r}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\left(\frac{1}{1+\widehat{r}}\right)^{2}+\left(\frac{\alpha A}{1+\widehat{r}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}=0$$

es decir

$$1+\widehat{r}=\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)(\widehat{r}-r^{*}-\kappa)$$

luego

$$\widehat{r}=\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)+\left(\frac{1}{\alpha}\right)(r^{*}+\kappa)>r^{*}+\kappa$$

La tasa de interés que cobra el intermediario monopolista es mayor a la que se cobraría en competencia perfecta $(r^{*}+\kappa)$; la cantidad prestada, es decir la inversión, será por lo tanto menor

Escrito de otra manera

$$\widehat{r}=r^{*}+\underbrace{\kappa}_{\text{costo intermediación}}+\underbrace{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)(1+r^{*}+\kappa)}_{\text{prima de monopolio}}$$

Países con distintos costos de intermediación y distinta concentración en el mercado financiero tendrán tasa de interés distintas

Podemos pensar en una *liberalización financiera* como una política en la cual se fomenta la competencia entre intermediarios

Esa política movería la economía en la dirección del modelo de competencia perfecta:

Reduciendo la tasa de interés doméstica ...

... e incentivando la inversión

PROBLEMAS SELECCIONADOS

1. *Restricciones de Crédito Endógenas*

Considere un modelo de comercio intertemporal con inversión, pero sin gasto de gobierno. La función de producción es:

$$Y_t = \theta_t K_t^{\alpha}$$

No hay incertidumbre. El agente representativo maximiza su utilidad:

$$U_1 = \log\left(C_1\right) + \beta \log\left(C_2\right)$$

y comienza el período 1 con un capital inicial K_1 y nivel de endeudamiento D_0 exógenos y positivos. El agente representativo decide en el período inicial si devuelve o no ese prestamo anterior D_0. Si decide cumplir sus obligaciones, garantiza un acceso ilimitado al mercado de capitales mundial para el período siguiente, por lo que enfrentaría las restricciones presupuestarias

$$C_1 + K_2 + S^* = \theta_1 K_1^\alpha - (1 + r^*) D_0$$

$$C_2 = \theta_2 K_2^\alpha + (1 + r^*) S^*$$

con S^* positivo o negativo, según la economía decida presar o pedir prestado para el período siguiente. En caso de no pagar o repudiar la deuda inicial (default), esa deuda inicial desparece pero la economía doméstica queda automáticamente excluída del mercado de capitales, enfrentando las restricciones presupuestarias

$$C_1 + K_2 = \theta_1 K_1^\alpha$$

$$C_2 = \theta_2 K_2^\alpha$$

Nótese que el único costo para la economía doméstica de repudiar su deuda inicial es su exclusión de los mercados financieros internacionales, volviendo al caso de una economía cerrada.

(i) Resuelva el problema del agente representativo suponiendo que cumple con su deuda inicial. Encuentre la inversión óptima, el consumo en cada período, y la utilidad total del agente representativo (U_1^{ndef}) en ese caso;

(ii) Resuelva ahora el problema del agente representativo suponiendo que repudia su deuda inicial. Encuentre la inversión óptima, el consumo en cada período, y la utilidad total del agente representativo (U_1^{def}) en ese caso;

(iii) Muestre bajo que valores de los parámetros la economía prefiere pagar su deuda a repudiarla (es decir, para que valores se cumple $U_1^{ndef} > U_1^{def}$);

(iv) Retrocediendo un período, el mercado de crédito mundial solo prestará un monto D_0 tal que se cumpla la condición anterior, es decir, tal que la economía doméstica tenga los incentivos correctos a pagarla. Muestre que ese razonamiento da lugar a una restricción de crédito endógena (para el período 0) del tipo $D_0 < D(K_1, \theta_1, \theta_2, \alpha, \beta, r^*)$. ¿Cómo afectan los parámetros del modelo ese límite de endeudamiento?

2. *Oligopolio en el Mercado Financiero Local*

Considere el modelo de comercio intertemporal con un intermediario financiero local monopólico visto en clase. No hay gobierno. El agente representativo resuelve el problema:

$$\max\left\{u\left(C_1\right)+\beta u\left(C_2\right)\right\}$$

$$s.t. \qquad C_1+S^*=K_1^\alpha$$

$$C_2=K_2^\alpha+\left(1+r^*\right)S^*-\left(1+\widehat{r}\right)K_2$$

en donde K_2 representa tanto la inversión como la demanda de crédito en el mercado financiero local. Seguimos suponiendo que el agente representativo puede prestar y pedir prestado en el mercado muncial a la tasa exógena r^*, pero que la inversión debe ser financiada por los intermediarios locales. A diferencia del modelo visto en clase, suponga ahora que el sistema fiinanciero local está formado por dos bancos que compiten a la

Cournot, dividiéndose esa demanda de crédito y cobrando una tasa de interés oligopólica $\widehat{r}$. Seguimos suponiendo que esos bancos pueden pedir prestado en el mercado mundial a la misma tasa r^* y que incurren en un costo marginal κ por unidad prestada.

(i) Resolviendo el problema del agente representativo encuentre la demanda de crédito óptima $K_2=D\left(\widehat{r}\right)$ y la correspondiente demanda inversa $\widehat{r}=\Psi\left(K_2\right)$;

(ii) Usando la demanda inversa $\widehat{r}=\Psi\left(K_2^a+K_2^b\right)$, en donde a y b son los dos bancos, maximice los beneficios de cada banco con respecto a la cantidad prestada K_2^i, $i=a,b$, tomando como dada la cantidad prestada por el otro intermediario (K_2^{-i}). Encuentre de esa manera las funciones de reacción $K_2^a\left(K_2^b\right)$ y $K_2^b\left(K_2^a\right)$.

(iii) Cruzando las funciones de reacción, encuentre la cantidad óptima prestada por cada banco y la tasa de interés doméstica oligopólica $\widehat{r}$. Muestre que esa tasa de interés está por encima de la tasa de interés competitiva, pero por debajo de la de monopolio; y

(iv) Generalice ahora el análisis anterior para n bancos compitiendo a la Cournot y encuentre la tasa de interés doméstica oligopólica como función del número de bancos en el mercado

III. BIENES NO-COMERCIABLES Y TIPO DE CAMBIO REAL

Definimos el *tipo de cambio real* para una economía como

$$e_t^r \equiv \frac{e_t P_t^*}{P_t}$$

en donde

- e_t: tipo de cambio nominal (peso por dolar)

- P_t^*: indice de precios del exterior

- P_t: indice de precios doméstico

El tipo de cambio real es una medida de la competitividad del país

Si existieran oportunidades perfectas de arbitraje entre bienes en el mercado doméstico y el extranjero, debería cumplirse la l*ey de un solo precio*:

$$P_t = (1 + \tau)\, e_t P_t^*$$

en donde τ representan costos de transporte, tarifas, etc.

Si estos costos son constantes, el tipo de cambio real también debiera ser constante a lo largo del tiempo

Sin embargo, en los datos se observa que el tipo de cambio real NO es constante

$\Rightarrow$ Se observan desviaciones sistemáticas de la ley de un solo precio

Bienes No-Comerciables

Existen distintas historias para explicar por qué observamos desviaciones de la ley de un solo precio

- Bienes diferenciados

- Competencia imperfecta

- Otras restricciones cuantitativas al comercio

Vamos a explorar una hipótesis alternativa, que implica suponer que un conjunto de bienes son *no-comerciables*

Estos bienes (por ejemplo, servicios) no pueden comprarse en el mercado mundial, solo en el local

Por lo tanto, sus precios no están sujetos a arbitraje

Podemos escribir el índice de precios de la economía como un promedio ponderado de los precios de los bienes comerciable (P_t^{tr}) y no-comerciable (P_t^n)

$$P_t = \omega P_t^{tr} + (1-\omega) P_t^n$$

luego

$$e_t^r = \frac{e_t \left[\omega^* P_t^{tr*} + (1-\omega^*) P_t^{n*}\right]}{\omega P_t^{tr} + (1-\omega) P_t^n}$$

o bien

$$e_t^r = \frac{e_t P_t^{tr*} \left[\omega^* + (1-\omega^*) \frac{P_t^{n*}}{P_t^{tr*}}\right]}{P_t^{tr} \left[\omega + (1-\omega) \frac{P_t^n}{P_t^{tr}}\right]}$$

Dado que la ley de un solo precio sí se cumple para bienes comerciables, podemos escribir

$$e_t^r = \frac{\omega^* + (1 - \omega^*)\, p_t^{n*}}{\omega + (1 - \omega)\, p_t^n}$$

Si los pesos ω y ω y el precio relativo de los bienes no-comerciables (relativo a los bienes comerciables) en el exterior p^{n*} son constantes, el tipo de camio real dependerá inversamente del precio relativo de los bienes no-comerciables doméstico

En ese sentido, podemos aproximar

$$e_t^r \approx \frac{1}{p_t^n} = \frac{P_t^{tr}}{P_t^n}$$

Movimientos en el tipo de cambio real se deben únicamente a cambios en el precio relativo de los biens comerciables (relativo a los no-comerciables)

La Hipótesis de Balassa-Samuelson

Consideremos un modelo con dos sectores (comerciable y no-comerciable) y las siguientes funciones de producción lineales

$$Y_t^{tr} = \theta_t L_t^{tr} \qquad Y_t^n = \eta_t L_t^n$$

que dependen solo del trabajo

Con libre movilidad de factores, para que haya trabajadores en ambos sectores el salario real debe ser igual en los dos, es decir

$$w_t = \theta_t = p_t^n \eta_t$$

en donde el salario real está medido en unidades del bien comerciable (numerario)

Por lo tanto

$$e_t^r = \frac{1}{p_t^n} = \frac{\eta_t}{\theta_t}$$

El tipo de cambio real depende únicamente del ratio de la productividad del trabajo en el sector no-comerciable sobre la productividad del trabajo en el sector comerciable

Balassa-Samuelson: *La tasa de progreso técnico es mayor en el sector comerciable (manufactura) que en el no-comerciable (servicios); por lo tanto, el tipo de cambio real tiende a apreciarse en el largo plazo*

De manera un poco más general

$$Y_t^{tr} = \theta_t \left(K_t^{tr}\right)^{\alpha} \left(L_t^{tr}\right)^{1-\alpha} \qquad Y_t^n = \eta_t L_t^n$$

luego, igualando el valor del producto marginal del trabajo en ambos sectores

$$e_t^r = \frac{1}{p_t^n} = \frac{\eta_t}{\theta_t \left(1-\alpha\right) \left(K_t^{tr}\right)^{\alpha} \left(L_t^{tr}\right)^{-\alpha}}$$

Esta formulación permite que *factores de demanda* puedan afectar el tipo de cambio real, a través de la asignación del trabajo entre los dos sectores

... pero eso implica resolver el modelo completo

Un Modelo Real con Bienes No-Comerciables

Volvemos al modelo real de comercio intertemporal de dos períodos, con los supuestos de

- Economía pequeña y abierta (mercado de crédito mundial con r^* dado)

- Producción con capital y trabajo, pero sin inversión (capital fijo en cada período)

Supondremos ahora que hay dos bienes: un bien comerciable (exportable e importable) y un bien no-comerciable doméstico

Consumidor Representativo

Función de utilidad

$$U = \log\left(C_1^{tr}\right) + \gamma \log\left(C_1^{n}\right) + \beta\left[\log\left(C_2^{tr}\right) + \gamma \log\left(C_2^{n}\right)\right]$$

en donde C_t^{tr} es el consumo del bien comerciable y C_t^{n} el del bien no-comerciable en cada período

Restricción presupuestaria:

$$\underbrace{C_1^{tr} + p_1^n C_1^n}_{C_1} + \underbrace{S^*}_{S} = \underbrace{w_1 L + r_1 K}_{Y_1}$$

$$\underbrace{C_2^{tr} + p_2^n C_2^n}_{C_2} = \underbrace{w_2 L + r_2 K}_{Y_2} + (1 + r^*) S^*$$

K y L son las dotaciones fijas de capital y trabajo, que normalizaremos al valor uno

p_t^n : precio del bien no-comerciable relativo al comerciable (inversa del tipo de cambio real)

w_t : salario real en unidades del bien comerciable

r_t : precio de alquiler del capital en unidades del bien comerciable

r^* : tasa de interés internacional (exógena)

S^* : préstamos al resto del mundo

Tecnologías

Dos tecnologías con rendimientos a escala constantes

- Sector comerciable: intensivo en capital

$$Y_t^{tr} = \theta_t \left(K_t^{tr}\right)^{\alpha} \left(L_t^{tr}\right)^{1-\alpha}$$

- Sector no-comerciable: intensivo en trabajo

$$Y_t^n = \eta_t L_t^n$$

Definimos el PIB (medido en unidades del bien comerciable) como:

$$Y_t = Y_t^{tr} + p_t^n Y_t^n$$

Equilibrio Competitivo

i) El consumidor representativo resuelve:

$$\max \quad \left\{\log\left(C_1^{tr}\right) + \gamma \log\left(C_1^{n}\right) + \beta\left[\log\left(C_2^{tr}\right) + \gamma \log\left(C_2^{n}\right)\right]\right\}$$

$$s.t. \quad C_1^{tr} + p_1^n C_1^n + S^* = w_1 + r_1$$

$$C_2^{tr} + p_2^n C_2^n = w_2 + r_2 + (1 + r^*) S^*$$

dados r^*, p_t^n, w_t y r_t, $t = 1, 2$

ii) En cada período $t = 1, 2$, la empresa del sector comerciable resuelve:

$$\max \quad Y_t^{tr} - w_t L_t^{tr} - r_t K_t^{tr}$$

$$s.t. \quad Y_t^{tr} = \theta_t \left(K_t^{tr}\right)^{\alpha} \left(L_t^{tr}\right)^{1-\alpha}$$

dados w_t y r_t

iii) En cada período $t = 1, 2$, la empresa del sector no-comerciable resuelve:

$$\max \quad p_t^n Y_t^n - w_t L_t^n$$

$$s.t. \quad Y_t^n = \eta_t L_t^n$$

dados w_t y p_t^n

iv) Los mercados se vacían:

$$Y_1^{tr} = C_1^{tr} + NX_1 \qquad Y_2^{tr} = C_2^{tr} + NX_2$$

$$Y_1^n = C_1^n \qquad Y_2^n = C_2^n$$

$$K_1^{tr} = 1 \qquad K_2^{tr} = 1$$

$$L_1^{tr} + L_1^n = 1 \qquad L_2^{tr} + L_2^n = 1$$

En un equilibrio competitivo, obtenemos nuevamente las identidades de cuentas nacionales

$$\begin{aligned} Y_1 &\equiv Y_1^{tr} + p_1^n Y_1^n \\ &= w_1 + r_1 \\ &= \underbrace{C_1^{tr} + p_1^n C_1^n}_{C_1} + NX_1 \end{aligned}$$

y de la balanza de pagos

$$\underbrace{S^*}_{-KA_1} = Y_1 - \left(C_1^{tr} + p_1^n C_1^n\right) = \underbrace{NX_1}_{CA_1}$$

Resolviendo el Equilibrio

Empezamos resolviendo el problema del consumidor representativo, con Lagrangeano:

$$
\begin{gathered}
L = \log\left(C_1^{tr}\right) + \gamma \log\left(C_1^n\right) + \beta\left[\log\left(C_2^{tr}\right) + \gamma \log\left(C_2^n\right)\right] \\
-\lambda_1\left[C_1^{tr} + p_1^n C_1^n + S^* - w_1 - r_1\right] \\
-\lambda_2\left[C_2^{tr} + p_2^n C_2^n - w_2 - r_2 - (1 + r^*) S^*\right]
\end{gathered}
$$

y condiciones de primer orden

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial C_1^{tr}} &= \frac{1}{C_1^{tr}} - \lambda_1 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial C_2^{tr}} &= \beta\frac{1}{C_2^{tr}} - \lambda_2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial C_1^{n}} &= \gamma\frac{1}{C_1^{n}} - \lambda_1 p_1^n = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial C_2^{n}} &= \gamma\beta\frac{1}{C_2^{n}} - \lambda_2 p_2^n = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial S^*} &= -\lambda_1 + \lambda_2 (1 + r^*) = 0
\end{aligned}
$$

Combinando, obtenemos la ecuación de Euler

$$C_2^{tr} = \beta \left(1 + r^*\right) C_1^{tr}$$

más las condiciones estáticas

$$\begin{aligned} C_1^n &= \left(\frac{1}{p_1^n}\right) \gamma C_1^{tr} \\ C_2^n &= \left(\frac{1}{p_2^n}\right) \gamma C_2^{tr} \end{aligned}$$

`Determinación del Tipo de Cambio Real`

En un equilibrio competitivo, tenemos que

$$w_1 = (1 - \alpha)\, \theta_1 \left(L_1^{tr}\right)^{-\alpha} = \eta_1 p_1^n$$

Es decir, los salarios son iguales en ambos sectores (e iguales a su producto marginal en cada uno de ellos), pues el mercado de trabajo es competitivo

Por lo tanto, el tipo de cambio real está dado por

$$e_1^r \equiv \frac{1}{p_1^n} = \frac{\eta_1}{w_1} = \frac{\eta_1}{(1 - \alpha)\, \theta_1 \left(L_1^{tr}\right)^{-\alpha}}$$

es decir, el ratio de la productividad del trabajo en el sector no-comerciable relativo al comerciable

La asignación del trabajo entre los dos sectores se obtiene de las condiciones estáticas y la función de producción del sector no-comerciable

$$\eta_1 \left(1 - L_1^{tr}\right) = \gamma e_1^r C_1^{tr}$$

$$\eta_2 \left(1 - L_2^{tr}\right) = \gamma e_2^r C_2^{tr}$$

de donde

$$L_1^{tr} = 1 - \left(\frac{\gamma}{w_1}\right) C_1^{tr} = 1 - \left(\frac{\gamma}{(1-\alpha)\,\theta_1 \left(L_1^{tr}\right)^{-\alpha}}\right) C_1^{tr}$$

y, usando la ecuación de Euler,

$$L_2^{tr} = 1 - \left(\frac{\beta\,(1+r^*)\,\gamma}{w_2}\right) C_1^{tr} = 1 - \left(\frac{\gamma\beta\,(1+r^*)}{(1-\alpha)\,\theta_2 \left(L_2^{tr}\right)^{-\alpha}}\right) C_1^{tr}$$

```
El Consumo y la Cuenta Corriente
```

Usando la restricción presupuestaria intertemporal

$$C_1^{tr} + p_1^n C_1^n + \left(\frac{1}{1+r^*}\right)\left(C_2^{tr} + p_2^n C_2^n\right) = w_1 + r_1 + \left(\frac{1}{1+r^*}\right)(w_2 + r_2)$$

y la condición de cero beneficios en cada sector, podemos reescribir

$$C_1^{tr} + p_1^n C_1^n + \left(\frac{1}{1+r^*}\right)\left(C_2^{tr} + p_2^n C_2^n\right)$$

$$= Y_1^{tr} + p_1^n Y_1^n + \left(\frac{1}{1+r^*}\right)\left(Y_2^{tr} + p_2^n Y_2^n\right)$$

o, reemplazando las condiciones de vaciado de mercado para el bien no-comerciable,

$$C_1^{tr} + \left(\frac{1}{1+r^*}\right) C_2^{tr} = Y_1^{tr} + \left(\frac{1}{1+r^*}\right) Y_2^{tr}$$

Combinando la restricción anterior con la ecuación de Euler, obtenemos la función consumo para el bien comerciable

$$C_1^{tr} = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left\{Y_1^{tr} + \left(\frac{1}{1+r^*}\right)Y_2^{tr}\right\}$$

o bien

$$C_1^{tr} = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left\{\theta_1\left(L_1^{tr}\right)^{1-\alpha} + \left(\frac{1}{1+r^*}\right)\theta_2\left(L_2^{tr}\right)^{1-\alpha}\right\}$$

Finalmente, de la condición de vaciado de mercado para el bien comerciable obtenemos la cuenta corriente

$$CA_1 = \theta_1\left(L_1^{tr}\right)^{1-\alpha} - C_1^{tr}$$

`Resolviendo el Modelo`

Empezamos resolviendo un sistema de tres ecuaciones simultáneas con tres incógnitas (C_1^{tr}, L_1^{tr} y L_2^{tr}):

1) $C_1^{tr} = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left\{\theta_1\left(L_1^{tr}\right)^{1-\alpha} + \left(\frac{1}{1+r^*}\right)\theta_2\left(L_2^{tr}\right)^{1-\alpha}\right\}$

2) $L_1^{tr} = 1 - \left(\frac{\gamma}{(1-\alpha)\theta_1\left(L_1^{tr}\right)^{-\alpha}}\right)C_1^{tr}$

3) $L_2^{tr} = 1 - \left(\frac{\gamma\beta(1+r^*)\gamma}{(1-\alpha)\theta_2\left(L_2^{tr}\right)^{-\alpha}}\right)C_1^{tr}$

Una vez resuelto este sistema, podemos hallar otras variables de interés

4) $w_1 = (1 - \alpha)\, \theta_1 \left(L_1^{tr}\right)^{-\alpha}$

5) $r_1 = \alpha\theta_1 \left(L_1^{tr}\right)^{1-\alpha}$

6) $C_1^n = \gamma \left(\frac{\eta_1}{w_1}\right) C_1^{tr}$

Finalmente, podemos encontrar el tipo de cambio real, la cuenta corriente y el PIB

7) $e_1^r = \frac{\eta_1}{w_1}$

8) $CA_1 = \theta_1 \left(L_1^{tr}\right)^{1-\alpha} - C_1^{tr}$

9) $Y_1 = w_1 + r_1$

Simulación Numérica

El sistema de ecuaciones (1)-(3) es difícil de resolver analíticamente, pues es no-lineal

Vamos a simular numéricamente la solución del sistema, usando los siguientes parámetros

$$\alpha = 0.4 \quad \beta = 0.95 \quad r^* = 0.05 \quad \gamma = 0.6$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \eta_1 = \eta_2 = 10$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos nuestra economía base (primera columna de la tabla)

Las siguientes columnas reportan la nueva solución (o equilibrio) cuando

- θ_1 aumenta de 10 a 15 (columna 2)
- θ_2 aumenta de 10 a 15 (columna 3)
- η_1 aumenta de 10 a 15 (columna 4)
- η_2 aumenta de 10 a 15 (columna 5)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
C_1^{tr}	6.6	8.3	8.2	6.6	6.6
L_1^{tr}	0.50	0.56	0.42	0.50	0.50
L_2^{tr}	0.50	0.42	0.56	0.50	0.50
C_1^n	5.0	4.4	5.8	7.5	5.0
w_1	7.9	11.3	8.5	7.9	7.9
r_1	2.6	4.2	2.4	2.6	2.6
e_1^r	1.3	0.9	1.2	1.9	1.3
CA_1	-0.01	2.3	-2.3	-0.01	-0.01
Y_1	10.6	15.6	10.9	10.6	10.6

Efectos de Choques Tecnológicos

- Un aumento en la productividad del sector comerciable *corriente* ($\theta_1 \uparrow$) aumenta el salario real ($w_1 \uparrow$), la renta del capital ($r_1 \uparrow$) y el ingreso ($Y \uparrow$)

  Al aumentar el ingreso, aumenta el consumo del bien comerciable ($c_1^{tr} \uparrow$) y el ahorro, por lo que la cuenta corriente mejora ($CA_1 \uparrow$)

  El aumento en el salario del sector comerciable genera una reasignación del trabajo del sector no-comerciable al sector comerciable ($L_1^{tr} \uparrow$), hasta igualar nuevamente los salarios

  El aumento en el salario real aumenta proprocionalmente más los costos de producción del sector no-comerciable, lo que aprecia el tipo de cambio real ($e_1^r \downarrow$) reduciendo el consumo del bien no-comerciable ($c_1^n \downarrow$)

- Un aumento en la productividad del sector comerciable *esperada* ($\theta_2 \uparrow$) aumenta el consumo corriente de ambos bienes, reduciendo el ahorro

  La cuenta corriente se deteriora, pues el aumento en el consumo se financian con préstamos del exterior

  Se produce una reasignación del trabajo del sector comerciable al sector no-comerciable, al aumentar el consumo de este último bien

  El salario real aumenta y el tipo de cambio real se aprecia

- Un aumento en la productividad del sector no-comerciable corriente ($\eta_1 \uparrow$) no cambia la asignación del trabajo entre sectores, ni el salario real, ni el consumo del bien comerciable ni la cuenta corriente

  El tipo de cambio real se deprecia en la misma proporción que el aumento en productividad

  El consumo del bien no-comerciable aumenta en la misma proporción

- Un amento en la productividad del sector no-comerciable esperada ($\eta_2 \uparrow$) no tiene ningún efecto en el primer período

  El tipo de cambio real del período 2 se deprecia

Impacto de Choques de Demanda

Por último, reportamos los resultados de los siguientes experimentos (nuevamente la primera columna es la economía base)

- r^* cae de 0.05 a 0.02 (columna 2)

- γ sube de 0.6 a 0.8 (columna 3)

El primer choque lo podemos interpretar como una reducción en el coste de acceso al crédito internacional, por ejemplo debido a una liberalización financiera

El segundo implica un aumento en la preferencia por bienes no-comerciables, por ejemplo debido a un boom en el sector vivienda

	(1)	(2)	(3)
C_1^{tr}	6.6	6.7	6.0
L_1^{tr}	0.50	0.49	0.43
L_2^{tr}	0.50	0.51	0.43
C_1^n	5.0	5.1	5.7
w_1	7.9	8.0	8.4
r_1	2.6	2.5	2.4
e_1^r	1.3	1.25	1.2
CA_1	-0.01	-0.15	-0.01
Y_1	10.6	10.6	10.8

Ambos choques reasignan trabajadores hacia el sector no-comerciable y aprecian el tipo de cambio real

PROBLEMAS SELECCIONADOS

1. *Resolviendo el Modelo con Bienes No-Comerciables*

Considere el modelo real de comercio intertemporal con bienes no-comerciables visto en clase. Asumiendo los siguientes valores para los parámetros:

$$\alpha = 0.3 \quad \beta = 0.9 \quad r^* = 0.10 \quad \gamma = 0.5$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \eta_1 = \eta_2 = 10$$

resuelva los valores de las variables endógenas del modelo para la economía base

$$L_1^{tr}, L_2^{tr}, C_1^{tr}, C_1^{n}, w_1, r_1, e_1^{r}, CA_1, Y$$

y realice los siguientes experimentos:

(i) Vuelva a resolver el equilibrio con los mismos parámetros salvo $r^* = 0.15$ y comente los principales efectos de un aumento de la tasa de interés mundial;

(ii) Vuelva a resolver el equilibrio con los mismos parámetros salvo $\gamma = 0.4$ y comente los principales efectos de una reducción del peso de los bienes no-comerciables en la función de utilidad;

(iii) Vuelva a resolver el equilibrio con los mismos parámetros pero para distintos valores de la productividad corriente en el sector comerciable ($\theta_1 \in \{6, 8, 10, 12, 14\}$). En base a sus resultados, grafique el tipo de cambio real como función de θ_1; y

(iv) Haga un gráfico similar al inciso (iii) para el tipo de cambio real, pero como función de los distintos valores de la productividad corriente en el sector no-comerciable ($\eta_1 \in \{6, 8, 10, 12, 14\}$)

2. *Términos de Intercambio y Tipo de Cambio Real*

Considere el modelo real de comercio intertemporal para una economía pequeña con dos periodos y bienes no-comerciables. Suponga ahora que además de los bienes comerciable y no-comerciable tenemos un tercer bien producido por la economía doméstica que sólo sirve para exportar (p.ej., petróleo). Este tercer bien no se consume domésticamente y su producción requiere solo trabajo. Las funciones de producción para cada bien son:

$$Y^{tr} = \theta_t \left(K_t^{tr}\right)^{\alpha} \left(L_t^{tr}\right)^{1-\alpha} \qquad \text{<- bien comerciable}$$

$$Y^{x} = \phi L^{x} \qquad \text{<- bien de exportación}$$

$$Y^{n} = \eta L^{n} \qquad \text{<- bien no-comerciable}$$

Existe perfecta movilidad de trabajo entre sectores. De otro lado, la función de utilidad del consumidor representativo está dada por:

$$U = \log\left(C_1^{tr}\right) + \gamma \log\left(C_1^{n}\right) + \beta\left[\log\left(C_2^{tr}\right) + \gamma \log\left(C_2^{n}\right)\right]$$

Llamemos p^x al precio relativo del bien de exportación con respecto al bien comerciable (que puede interpretarse como los términos de intercambio de la economía doméstica), exógenamente dado por el mercado mundial. La tasa de interés mundial r^* también es exógena.

(i) Defina un equilibrio competitivo para esta economía y encuentre las condiciones de primer orden del problema del consumidor representativo y los precios de equilibrio;

(ii) Usando las condiciones obtenidas en (i) más otras condiciones de equilibrio, encuentre un sistema de ecuaciones que caracterice el equilibrio competitivo (incluyendo las ecuaciones del consumo, la cuenta corriente, el tipo de cambio real, etc.); y

(iii) Analice el impacto sobre las principales variables del modelo de una mejora en los términos de intercambio ($p^x \uparrow$), en particular su impacto sobre el tipo de cambio real y la cuenta corriente. No necesita hacer cálculos numéricos ni demostrar nada, sólo explicar la intuición apoyándose en las ecuaciones halladas en (iii)

3. *Modelo con Insumos Intermedios*

Considere el modelo real de comercio intertemporal para una economía pequeña con dos periodos y bienes no-comerciables. Suponga ahora que el sector comerciable utiliza como insumos el bien producido por el sector no-comerciable. Por ejemplo, la electricidad (no-comerciable) es necesaria para producir automóviles (comerciable). En particular, la tecnología para producir el bien comerciable está descrita por la función de producción con rendimientos a escala constantes:

$$Y_t^{tr} = \theta_t F\left(K_t^{tr}, L_t^{tr}, Q_t^{tr}\right)$$

en donde Q^{tr} es la cantidad de insumos comprados por el sector comerciable al sector no-comerciable (medida en unidades del bien no-comerciable). La función de producción del sector comerciable sigue siendo:

$$Y_t^n = \eta_t L_t^n$$

Existe perfecta movilidad de trabajo entre sectores. La función de utilidad del consumidor representativo está dada por:

$$U = \log\left(C_1^{tr}\right) + \gamma \log\left(C_1^n\right) + \beta\left[\log\left(C_2^{tr}\right) + \gamma \log\left(C_2^n\right)\right]$$

La tasa de interés mundial r^* es exógena.

(i) Defina un equilibrio competitivo para esta economía;

(ii) Obtenga las condiciones de primer orden del problema del consumidor (Ecuación de Euler y condiciones estáticas) y los precios de equilibrio. Derive la función consumo y otras ecuaciones adicionales;

(iii) Analice el efecto de una caída en la productividad del sector no-comerciable del primer período ($\eta_1 \downarrow$) sobre el tipo de cambio real, la cuenta corriente y la asignación de trabajo entre los dos sectores. ¿Sigue siendo cierto, como en el modelo visto en clase, que un cambio en la productividad del sector no-comerciable se traslada a un cambio similar en el tipo de cambio real, sin afectar otras variables del modelo (con la excepción del consumo de bienes no-comerciables)?