NOTAS SOBRE CRECIMIENTO Y CICLOS ECONOMICOS

Carlos Urrutia

Ilades-Georgetown University

Diciembre, 1996

Tabla de Contenidos

Contents

1. Introducción

El presente trabajo es una recopilación de algunas notas que utilicé para el dictado del curso de Macroeconomía I en el programa de post-grado de Ilades/Georgetown University (en Santiago de Chile), institución en donde permanecí como profesor visitante durante el segundo semestre de 1996. El objetivo del curso fue presentar de manera introductoria algunos de los avances recientes en macroeconomía dinámica, relacionados tanto con el comportamiento de largo plazo de la economía (crecimiento) como con sus fluctuaciones de corto plazo (ciclos económicos).

En el enfoque macroeconómico tradicional, predominante hasta los setenta, el crecimiento y los ciclos económicos eran temas tratados por separado. Los modelos estáticos de corto plazo explicaban el nivel de actividad de la economía en un momento del tiempo tomando los stocks (capital, activos financieros o dinero) como dados. Se asumía que la evolución de estos stocks en el tiempo no afectaba las decisiones presentes de consumo e inversión, las cuales respondían a reglas *ad-hoc* sin mayor sustento microeconómico. Dicha evolución podía ser entonces estudiada de manera independiente usando modelos dinámicos de crecimiento.

Durante los setenta este enfoque pasó a ser seriamente cuestionado. Al retomar la hipótesis de *expecativas racionales*, diversos economistas mostraron que los parámetros de las funciones consumo e inversión no eran estructurales sino que respondían a los cambios en el ambiente económico (especialmente en las políticas seguidas por el gobierno)[1]. La alternativa propuesta fue volver a los fundamentos microeconómicos, modelando explícitamente las decisiones de los agentes en un contexto dinámico. Esto eliminó de hecho la separación artificial entre corto plazo y largo plazo, puesto que las expectativas sobre el futuro afectan las deciones presentes, y estas a su vez afectan las oportunidades futuras[2].

[1] Estos argumentos están condensados en la llamada *Crítica de Lucas*, presentada por primera vez en Lucas (1976).

[2] Los artículos introductorios de Lucas (1980) y Mankiw (1990) muestran desde perspectivas distintas varios de estos aspectos de la evolución de la macroeconomía en las últimas décadas.

Este enfoque alternativo está aún en construcción. Muchos de los avances recientes en esa dirección están asociados a los llamados *nuevos clásicos*, formados en el paradigma del equilibrio general. La piedra angular en esta literatura es el *modelo de crecimiento neoclásico*, en sus versiones determinística y estocástica. Este modelo, usado inicialmente para el análisis del largo plazo, poco a poco se ha ido imponiendo como un estándar para el estudio de los ciclos económicos. Esto se debe tanto a su disciplina, pues obliga a hacer explícitos los supuestos sobre el ambiente en que los agentes toman decisiones, como a su flexibilidad, ya que puede ser adaptado para incorporar distintas fuentes de fluctuaciones y mecanismos de transmisión.

El objetivo de estas notas es entonces presentar con cierto detalle el modelo de crecimiento neoclásico junto con algunas aplicaciones a temas de crecimiento y ciclos económicos, con el fin de proveer a los lectores de las técnicas requeridas para entender el debate macroeconómico actual. En esa dirección, los problemas incluídos en el Apéndice buscan reforzar el manejo de estas técnicas y mostrar su amplia gama de aplicabilidad a problemas concretos de distinto tipo.

Dado el carácter introductorio del curso, traté de utilizar un mínimo de herramientas matemáticas nuevas. Así, por ejemplo, preferí no introducir técnicas de optimización intertemporal tales como programación dinámica o control óptimo, usadas extensivamente en la literatura reciente[3]. Alternativamente, seguí un enfoque más intuitivo (aunque no menos riguroso) basado en una extensión simple de las condiciones de primer orden obtenidas de los problemas de optimización estática. Dicho enfoque fue suficiente para los efectos del curso, pero tiene algunas limitaciones en aplicaciones más elaboradas (por ejemplo, para resolver numéricamente y simular los modelos de ciclos económicos).

Aparte de las herramientas matemáticas ya mencionadas, algunos de los temas que tuve que dejar de lado por motivos de tiempo fueron los siguientes. En la parte de crecimiento, faltó una revisión de los modelos de crecimiento endógeno, especialmente aquellos con externalidades o capital humano[4]. Asimismo, no se analizaron modelos con dos o más sectores, importantes por ejemplo para tratar

[3]Estas técnicas pueden ser estudiadas a partir de libros de texto como el de Sargent (1987) y el de Barro y Xala-i-Martin (1995). Ambos textos constituyen además una buena referencia sobre le modelo de creciemiento neoclásico.

[4]Estos temas son tratados en detalle en el texto de Barro y Xala-i-Martin (1995).

el tema del comercio. Con respecto a los ciclos económicos, la omisión más importante es la de los modelos con competencia imperfecta y rigideces nominales (*nuevos keynesianos*), cuyas versiones más recientes tratan de incorporar este tipo de elementos dentro del modelo de crecimiento neoclásico[5]. Por último, faltó estudiar modelos con agentes heterogéneos, que permiten abordar temas como la distribución del ingreso[6].

Finalmente, debo agradecer a mis alumnos y colegas de Ilades/Georgetown University, quienes me alentaron a publicar estas notas y señalaron más de un errror en las versiones preliminares. Evidentemente, la responsabilidad por los errores subsistentes es totalmente mía.

Carlos Urrutia.

[5] Véase, por ejemplo, el artículo de Rotemberg (1987)

[6] Este y otros temas avanzados en la literatura de ciclos económicos están incluídos en el libro editado por Cooley (1995).

Part I
Crecimiento

2. Ahorro, Inversión y Crecimiento

2.1. Introducción

En la tradición keynesiana, los modelos macroeconómicos predominantes hasta los setenta se caracterizan por analizar los determinantes del nivel de ingreso en un momento del tiempo. Es decir, se trata de modelos estáticos que no toman en cuenta la evolución de la economía en el tiempo, ni como las decisiones presentes afectan las oportunidades en el futuro.

Esta limitación es especialmente importante para el tratamiento del ahorro y la inversión. En los modelos estáticos, la inversión es un componente más de la demanda agregada, cuyas fluctuaciones afectan sólo el ingreso presente. Sin embargo, resulta evidente que la única manera de racionalizar el hecho que los agentes ahorren e inviertan, renunciando a consumir más en el presente, es porque esperan obtener un mayor ingreso y consumo futuro. Esta idea de *sustitución intertemporal del consumo* es imposible de analizar en un modelo estático.

El artículo de Solow (1956) es uno de los primeros en los cuales se analiza desde esta perspectiva la relación entre la tasa de ahorro de una economía y su nivel de ingreso en el largo plazo. El resultado central es que países que ahorran una mayor proporción de su producto acumulan un mayor nivel de capital por trabajador, luego alcanzan mayores niveles de ingreso per-cápita. La solidez empírica de este resultado ha sido demostrada entre otros por Mankiw, Romer y Weil (1992).

2.2. El Modelo de Solow

Vamos a presentar una versión del modelo de Solow en tiempo discreto, que nos permite mostrar sus principales resultados e introducir cierta notación que va a ser útil más adelante.

En esta economía existe un único bien, producido usando la función de producción agregada con retornos a escala constantes:

$$Y_t = F(K_t, L_t)$$

en donde K_t es el stock de capital y L_t la fuerza laboral en la economía, que crece a la tasa constante n:

$$L_{t+1} = (1 + n)L_t$$

Como es habitual, se asume que la función de producción es cóncava, luego $F_K, F_N > 0$, $F_{KK}, F_{NN} < 0$ y $F_{KN} > 0$.

El producto total es usado para consumo e inversión:

$$Y_t = C_t + I_t$$

Por simplicidad, Solow asume que la tasa de ahorro (inversión) es una constante s, luego:

$$I_t = sY_t$$

Por último, la inversión incrementa el stock de capital en el siguiente período, de acuerdo a:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$$

en donde δ es una tasa constante de depreciación.

2.3. Estado Estacionario

Dividiendo todas las variables por L_t y aprovechando las propiedades de la función de producción, podemos reescribir el modelo en *forma intensiva* como:

$$\begin{aligned} y_t &= f(k_t) && (2.1)\\ y_t &= c_t + i_t && (2.2)\\ i_t &= sy_t && (2.3)\\ (1+n)k_{t+1} &= (1-\delta)k_t + i_t && (2.4) \end{aligned}$$

en donde las variables en minúsculas están expresadas en unidades del único bien por trabajador, y tenemos $f(k) = F(\frac{K}{L}, 1)$, con $f' > 0$ y $f'' < 0$.

Un *estado estacionario* es una solución a (2.1) - (2.4) en la cual todas las variables por trabajador permanecen constantes. Claramente, el stock de capital k^* en estado estacionario debe satisfacer:

$$(1+n)k^* = (1-\delta)k^* + sf(k^*)$$

o, simplificando:

$$(n+\delta)k^* = sf(k^*) \tag{2.5}$$

A partir de (2.5), podemos mostrar que existe un único stock de capital por trabajador k^* en estado estacionario y por lo tanto un único nivel de producto por trabajador $y^* = f(k^*)$. Podemos mostrar también que un aumento exógeno en la tasa de crecimiento de la fuerza laboral n reduce k^* y y^*, mientras que un aumento exógeno en la tasa de ahorro s incrementa k^* y y^*.

2.4. Estabilidad

Queremos analizar si el modelo tiende en el largo plazo hacia el estado estacionario, es decir si dado cualquier k_0 inicial, la trayectoria k_t converge hacia k^*. Sólo en ese caso tiene sentido pensar en el estado estacionario como una predicción del comportamiento de largo plazo de la economía. De ser así, decimos que el modelo es *globalmente estable*.

Para ello, combinamos (2.1), (2.3) y (2.4) para obtener:

$$(1+n)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + sf(k_t)$$

luego:

$$\gamma_k = \frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = \frac{1}{1+n}\left[s\frac{f(k_t)}{k_t} - (\delta + n)\right] = \Phi(k_t) \tag{2.6}$$

es decir, la tasa de crecimiento del capital por trabajador γ_k depende del nivel de k_t.

Usando (2.5), podemos verificar que (i) $\Phi(k^*) = 0$; (ii) $\Phi(k_t) > 0, \forall k_t < k^*$; y (iii) $\Phi(k_t) < 0, \forall k_t > k^*$. Por lo tanto, si el stock de capital por trabajador está por debajo (encima) de k^*, este crecerá a una tasa positiva (negativa). Solo una vez llegado al estado estacionario, el stock de capital por trabajador se mantiene constante.

En otras palabras, $k_t \to k^*$ monotónicamente, independientemente del valor inicial k_0, por lo que el modelo es globalmente estable. Similarmente, es facil mostrar que $y_t \to y^*$ monotónicamente.

2.5. Transición y Convergencia Condicional

La tasa de crecimiento de k_t durante la transición hacia k^* está dada por la función $\Phi(k_t)$ en (2.6). Hallando su primera derivada:

$$\Phi'(k_t) = \frac{s}{1+n}\left[\frac{f(k_t) - f'(k_t)k_t}{(k_t)^2}\right] \tag{2.7}$$

vemos que $\Phi'(k_t) < 0$, $\forall k_t$. Por lo tanto, la tasa de crecimiento del capital por trabajador (en valor absoluto) disminuye conforme k_t se acerca a k^*.

Del mismo modo, podemos mostrar que la tasa de crecimiento del producto por trabajador (γ_y) disminuye conforme y_t se acerca a su nivel de estado estacionario y^*.

En otras palabras, si tenemos dos economías con el mismo estado estacionario pero con distintos niveles iniciales de capital (y producto), la economía más pobre crecerá a una tasa mayor. Ahora bien, si dos economías tienen distintos estados estacionarios (por ejemplo, porque tienen distintas tasas de ahorro), lo único que podemos decir es que la economía que se encuentre más lejos de su estado estacionario será la que crecerá más rápido. A esta propiedad se le conoce como *convergencia condicional.*

3. El Modelo de Crecimiento Neoclásico

3.1. Introducción

El modelo de crecimiento de Solow (1956) muestra que hay una relación positiva entre la tasa de ahorro de una economía y su nivel de ingreso en el largo plazo. Sin embargo, al asumir esta tasa como una constante exógenamente dada, está sujeto al igual que los modelos macroeconómicos tradicionales a la crítica de Lucas (1976). Dificilmente podemos creer que la tasa de ahorro sea un parámetro estructural, independiente de las expectativas de los agentes y las políticas seguidas por el gobierno.

El modelo de crecimiento neoclásico, desarrollado de manera independiente por Ramsey, Cass y Koopmans, busca endogenizar la tasa de ahorro como el resultado de agentes competitivos resolviendo problemas de maximización dinámicos. En él, los únicos parámetros estructurales son aquellos que describen las preferencias de estos agentes y la tecnología a la que tienen acceso. En ese sentido, es un primer paso para reconstruir la teoría macroeconómica a partir de fundamentos microeconómicos.

3.2. El Modelo Básico

Existen dos tipos de agentes en esta economía. En primer lugar, tenemos un número grande de familias idénticas, que viven un infinito número de períodos y que podemos modelar como una única familia representativa. En segundo lugar, tenemos un número grande de firmas idénticas que producen el único bien de la economía, y que podemos modelar también como una única firma representativa.

La familia representativa (de tamaño L_t) tiene preferencias descritas por la función de utilidad intertemporal:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(\frac{C_t}{L_t}\right) \tag{3.1}$$

en donde u es una función de utilidad de un período (con $u' > 0$ y $u'' < 0$) y β es un factor de descuento que asumimos constante.

Esta familia posée todo el capital y trabajo en la economía, que renta a las firmas. Al mismo tiempo compra a estas firmas el único bien, que puede ser usado tanto para consumo como inversión. Pero la familia es también dueña de la firma representativa (a través de acciones), por lo tanto recibe todos los beneficios que ésta pueda generar.

La familia representativa enfrenta entonces la siguiente restricción presupuestaria:

$$C_t + I_t = w_t L_t + r_t K_t + \Pi_t \tag{3.2}$$

en donde los gastos en consumo e inversión deben ser iguales a los ingresos (salarios mas renta del capital mas beneficios) en cada período. Nótese que estamos normalizando el precio del único bien para que sea igual a uno en cada período, por lo tanto w_t y r_t son precios relativos expresados en unidades del único bien.

El stock de capital familiar crece de acuerdo a:

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + I_t \tag{3.3}$$

en donde δ es una tasa constante de depreciación, mientras que el números de trabajadores (o el tamaño de la familia) crece a la tasa exógena n:

$$L_{t+1} = (1 + n) L_t \tag{3.4}$$

De otro lado está la firma representativa, que renta capital y trabajo de las familias para producir el único bien en la economía, usando la función de producción agregada con retornos a escala constantes:

$$Y_t = F(K_t, L_t) \tag{3.5}$$

en donde asumimos que $F_K, F_N > 0$, $F_{KK}, F_{NN} < 0$ y $F_{KN} > 0$. El objetivo de esta firma es maximizar beneficios Π_t en cada período, en donde:

$$\Pi_t = Y_t - w_t L_t - r_t K_t \tag{3.6}$$

normalizando nuevamente el precio del único bien para que sea uno en cada período. Podemos demostrar que con rendimientos a escala constantes los beneficios van a ser siempre iguales a cero.

Puesto que el tamaño de la población crece a una tasa constante, podemos reescribir el modelo en forma intensiva, en donde las variables c_t, i_t, k_t, y_t están expresadas en unidades del único bien por trabajador. Así, por ejemplo:

$$u\left(\frac{C_t}{L_t}\right) = u\left(c_t\right)$$

$$\frac{K_{t+1}}{L_t} = \frac{L_{t+1}}{L_t}\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = (1+n)\,k_{t+1}$$

y, usando la propiedad de retornos a escla constantes de la función de producción:

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = F(\frac{K_t}{L_t}, 1) = f\left(k_t\right)$$

con $f' > 0$ y $f'' < 0$.

3.3. Equilibrio General Competitivo

Un *Equilibrio General Competitivo* (EGC) para esta economía es un conjunto de secuencias para las cantidades c_t, i_t, y_t y k_{t+1} y los precios w_t y r_t tales que:

i) Dados $k_0 > 0$,w_t y r_t, las secuencias c_t, i_t y k_{t+1} resuelven el problema:

$$\max \qquad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(c_t\right) \tag{3.7}$$

$$\begin{array}{lrcll} s.t. & c_t + i_t & = & w_t + r_t k_t & \forall t \\ & (1+n)\,k_{t+1} & = & (1-\delta)\,k_t + i_t & \forall t \end{array}$$

ii) En cada período t, dados w_t y r_t, los valores y_t y k_t resuelven el problema:

$$\max \qquad y_t - w_t - r_t k_t \tag{3.8}$$

$$s.t. \qquad y_t = f\left(k_t\right)$$

iii) En cada período t, hay igualdad entre oferta y demanda:

$$y_t = c_t + i_t \tag{3.9}$$

Nótese que estamos automáticamente asumiendo que los mercados de trabajo y capital están en equilibrio, y que los beneficios de la firma son iguales a cero.

3.4. El Problema del Planificador Social

Consideremos por un momento una economía como la descrita anteriormente, pero en la cual las decisiones son tomadas por un planificador social o un dictador benevolente. Este planificador busca maximizar la utilidad de las familias representada por (3.1), sujeto a las restricciones tecnológicas dadas por (3.3) y (3.5). Las cantidades resultantes de esta maximización son Optimos de Pareto, en el sentido que no es posible aumentar la utilidad de alguna de las familias sin reducir la de otra.

Formalmente, un *Optimo de Pareto* (OP) para esta economía es un conjunto de secuencias para las cantidades c_t, i_t y k_{t+1} que, dado $k_0 > 0$, resuelven el problema del planificador social:

$$\max \qquad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{3.10}$$

$$\begin{array}{lrcll} s.t. & c_t + i_t & = & f(k_t) & \forall t \\ & (1+n)\, k_{t+1} & = & (1-\delta)\, k_t + i_t & \forall t \end{array}$$

Podemos demostrar (más adelante lo haremos) que si no existen distorsiones tales como impuestos o externalidades, todo EGC es un OP y para cada OP existe un sistema de precios que lo hace un EGC. Esta equivalencia entre el problema del planificador social y los problemas de familias y firmas competitivas es una aplicación directa de los *Teoremas del Bienestar*. En la práctica, nos permite hallar el EGC resolviendo primero el problema del planificador social, que es mas sencillo, y luego encontrando los precios.

3.5. Condiciones de Primer Orden

Para caracterizar la solución al problema del planificador social, construimos la función lagrangeana intertemporal:

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \left[\beta^t u(c_t) - \lambda_{1t}(c_t + i_t - f(k_t)) - \lambda_{2t}((1+n)k_{t+1} - (1-\delta)k_t - i_t)\right]$$

Maximizando L, las condiciones de primer orden para (3.10) están dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \beta^t u'(c_t) - \lambda_{1t} = 0 \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial i_t} = -\lambda_{1t} + \lambda_{2t} = 0 \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} = \lambda_{1t+1} f'(k_t) - \lambda_{2t}(1+n) + \lambda_{2t+1}(1-\delta) = 0 \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{1t}} = c_t + i_t - f(k_t) = 0 \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{2t}} = (1+n)k_{t+1} - (1-\delta)k_t - i_t = 0 \tag{3.15}$$

más la *condición de transversalidad*:

$$\lim_{t\to\infty} v_t k_t = 0 \tag{3.16}$$

en donde $v_t = \prod_{j=t}^{\infty} \frac{\lambda_{2j}}{\lambda_{2j+1}}$ representa el valor de una unidad de capital. La condición de transversalidad asegura que el valor del stock de capital sea cero al "final" del problema; en caso contrario, el planificador quedaría con recursos no utilizados.

Combinando (3.12) y (3.13), vemos que:

$$\frac{\lambda_{2t}}{\lambda_{2t+1}} = \frac{f'(k_{t+1}) + (1-\delta)}{1+n}$$

y por lo tanto:

$$v_t = \prod_{j=t}^{\infty} \frac{f'(k_{j+1}) + (1-\delta)}{1+n}$$

es decir, v_t es el producto de las tasas de retorno presente y futuros (por persona y netos de depreciación) de invertir una unidad adicional de capital por un período.

Ahora bien, combinando (3.11), (3.12) y (3.13) obtenemos la *Ecuación de Euler*:

$$\frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} = \frac{f'(k_{t+1}) + (1-\delta)}{1+n} \tag{3.17}$$

que dice intuitivamente que la tasa marginal de sustitución entre el consumo presente y el consumo en el siguiente período, ajustada por el factor de descuento, debe ser igual a la tasa de retorno a la inversión por un período mencionada anteriormente

De otro lado, combinando (3.14) y (3.15), obtenemos:

$$c_t = f(k_t) - (1+n)\,k_{t+1} + (1-\delta)\,k_t \tag{3.18}$$

que expresa el consumo como la diferencia entre la producción total menos la inversión en nuevo capital. Las condiciones (3.17) y (3.18) forman un sistema no lineal de ecuaciones en diferencias en c_t y k_t, que puede ser resuelto numéricamente. Este sistema, junto a la condición de transversalidad (3.16), caracterizan completamente el Optimo de Pareto.

El siguiente paso es encontrar los precios para los cuales el OP anterior es un EGC. Para ello, resolvemos el problema de la firma representativa (3.8), que podemos reescribir como:

$$\max \qquad f\left(k_t\right) - w_t - r_t k_t$$

y cuya solución nos da los precios:

$$\begin{aligned} r_t &= f'(k_t) & (3.19)\\ w_t &= f\left(k_t\right) - f'(k_t)k_t & (3.20) \end{aligned}$$

que junto a las cantidades descritas anteriormente constituyen un Equilibrio General Competitivo. Nótese que para hallar w_t usamos la propiedad de que los beneficios son cero con rendimientos a escala constantes.

Sólo para verificar que efectivamente tenemos un EGC, podemos resolver el problema de la familia (3.7), cuyo lagrangeano está dado por:

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \left[\beta^t u\left(c_t\right) - \lambda_{1t}\left(c_t + i_t - w_t - r_t k_t\right) - \lambda_{2t}\left(\left(1+n\right) k_{t+1} - \left(1-\delta\right) k_t - i_t\right) \right]$$

con condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \beta^t u'\left(c_t\right) - \lambda_{1t} = 0 \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial i_t} = -\lambda_{1t} + \lambda_{2t} = 0 \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} = \lambda_{1t+1} r_{t+1} - \lambda_{2t}(1+n) + \lambda_{2t+1}(1-\delta) = 0 \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{1t}} = c_t + i_t - w_t - r_t k_t = 0 \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{2t}} = \left(1+n\right) k_{t+1} - \left(1-\delta\right) k_t - i_t = 0 \tag{3.25}$$

y condición de transversalidad:

$$\lim_{t \to \infty} v_t k_t = 0 \tag{3.26}$$

con $v_t = \prod_{j=t}^{\infty} \frac{\lambda_{2j}}{\lambda_{2j+1}}$.

Al igual que en el OP, podemos colapsar estas condiciones en el sistema de ecuaciones en diferencias compuesto por la Ecuación de Euler:

$$\frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} = \frac{r_{t+1} + (1-\delta)}{1+n} \tag{3.27}$$

y la condición:

$$c_t = w_t + \left[r_t + \left(1-\delta\right)\right] k_t - \left(1+n\right) k_{t+1} \tag{3.28}$$

Comparando las ecuaciones (3.17) - (3.18) con (3.27) - (3.28), podemos ver que estas son idénticas si se cumple que $r_{t+1} = f'(k_{t+1})$ y que $w_t + r_t k_t = f(k_t)$. Pero esto está garantizado por (3.19) y (3.20), que son condiciones de equilibrio obtenidas a partir del problema de la firma representativa. Por lo tanto, verificamos la equivalencia entre OP y EGC para este modelo en particular.

3.6. Estado Estacionario

Un *Estado Estacionario* para esta economía es un Equilibrio General Competitivo en el cual todas las cantidades son constantes a lo largo del tiempo.

El estado estacionario es sencillo de caracterizar. Puesto que $c_{t+1} = c_t = c^*$ y $k_{t+1} = k_t = k^*$, tenemos usando (3.17) que:

$$f'(k^*) = \frac{1+n}{\beta} - (1-\delta) \tag{3.29}$$

y puesto que f' es decreciente, podemos mostrar que existe un único stock de capital por trabajador de estado estacionario k^*. Adicionalmente, podemos mostrar que un aumento en n o δ reduce el capital por trabajador (luego el ingreso per capita) en estado estacionario, mientras que un aumento en β lo incrementa.

El consumo en estado estacionario puede hallarse usando (3.18):

$$c^* = f(k^*) - (n+\delta)\, k^*$$

por lo que la tasa de ahorro (o inversión) estaría dada por:

$$s^* = \frac{f(k^*) - c^*}{f(k^*)} = (n+\delta)\frac{k^*}{f\,(k^*)} \tag{3.30}$$

Nótese que (3.30) es la misma relación encontrada en el estado estacionario del modelo de Solow, aunque en este caso s^* es endógena. Puesto que $\frac{k}{f(k)}$ es una función creciente de k, un aumento en β incrementa la tasa de ahorro, pero el efecto de n y δ es ambiguo.

3.7. Estabilidad y Transición

Es posible demostrar que el modelo que estamos analizando es globalmente estable, es decir que si $k_0 > 0$, el stock de capital por trabajador tiende a su valor de estado estacionario k^*. Por lo tanto, tiene sentido usar el estado estacionario como una aproximación al comportamiento de largo plazo de la economía. La demostración es, sin embargo, más complicada que en el modelo de Solow.

En general el análisis de la transición hacia el estado estacionario es difícil en este tipo de modelos, dado el carácter no lineal del sistema de ecuaciones en diferencias que lo describe. Por ello, estos modelos suelen resolverse numéricamente. Esto implica especificar formas funcionales, asignar valores para los parámetros y obtener del computador una aproximación a las trayectorias para las variables que nos interesen.

Un método simple para computar la trayectoria de k_t se obtiene combinando las ecuaciones (3.17) y (3.18), de donde tenemos:

$$\frac{u'(f(k_t) - (1+n)\,k_{t+1} + (1-\delta)\,k_t)}{\beta u'(f(k_{t+1}) - (1+n)\,k_{t+2} + (1-\delta)\,k_{t+1})} = \frac{f'(k_{t+1}) + (1-\delta)}{1+n}$$

condición que podemos reescribir como:

$$\Psi\left(k_t, k_{t+1}, k_{t+2}\right) = 0$$

en donde la función Ψ depende de la forma de las funciones u y f más los parámetros β, δ y n (que debemos escoger previamente).

El algoritmo es el siguiente. Dado un $k_0 > 0$, "adivinamos" un valor para k_1 y hallamos k_2, k_3, k_4, ... resolviendo iterativamente:

$$\begin{aligned} \Psi\left(k_0, k_1, k_2\right) &= 0 \\ \Psi\left(k_1, k_2, k_3\right) &= 0 \\ \Psi\left(k_2, k_3, k_4\right) &= 0 \end{aligned}$$

y así sucesivamente hasta completar una secuencia lo suficientemente larga k_t. Esta secuencia depende del valor inicial que asignamos a k_1 (que puede ser correcto o no). Lo que hacemos es verificar si la trayectoria k_t converge hacia el valor de estado estacionario k^*, que podemos calcular a partir de (3.29). Si no converge, cambiamos el valor de k_1 y volvemos a recalcular la secuencia, hasta obtener convergencia.

Nótese que una vez obtenida la secuencia de valores para k_t podemos calcular las trayectorias para c_t, y_t, w_t, r_t y cualquier otra variable de interés.

3.8. Un Ejemplo Ilustrativo

A modo de ilustración, vamos a trabajar con un caso particular de la economía descrita anteriormente, en el cual

$$\begin{aligned} u(c_t) &= \log c_t \\ f(k_t) &= k_t^\alpha \end{aligned}$$

donde la función de producción en forma intensiva se deriva de una Cobb-Douglas, de la forma $F(K_t, L_t) = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$.

El equilibrio está caracterizado por la ecuación de Euler:

$$\frac{c_{t+1}}{\beta c_t} = \frac{\alpha k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)}{1+n}$$

junto con la condición:

$$c_t = k_t^\alpha - (1+n)\, k_{t+1} + (1-\delta)\, k_t$$

mas los precios:

$$\begin{aligned} r_t &= \alpha k_t^{\alpha-1} \\ w_t &= (1-\alpha) k_t^\alpha \end{aligned}$$

y la condición de transversalidad.

En estado estacionario, tenemos que:

$$\alpha\, (k^*)^{\alpha-1} = \frac{1+n}{\beta} - (1-\delta)$$

luego, el valor del stock de capital por trabajador en estado estacionario está dado por:

$$k^* = \left[\frac{\alpha}{\frac{1+n}{\beta} - (1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

de donde podemos verificar que un aumento en α o β, o una disminución en n o δ, aumenta k^*.

También sabemos que en estado estacionario:

$$s^* = (n+\delta)(k^*)^{1-\alpha}$$

luego, la tasa de ahorro en estado estacionario está dada por:

$$s^* = \frac{(n+\delta)\alpha}{\frac{1+n}{\beta} - (1-\delta)}$$

de donde podemos mostrar que un aumento en α, β, n o δ aumenta s^*.

Finalmente, la función que utilizamos anteriormente para computar la trayectoria de k_t fuera del estado estacionario está dada por:

$$\Psi(k_t, k_{t+1}, k_{t+2}) = \frac{k_{t+1}^{\alpha} - (1+n)\,k_{t+2} + (1-\delta)\,k_{t+1}}{\beta\left(k_t^{\alpha} - (1+n)\,k_{t+1} + (1-\delta)\,k_t\right)} - \frac{\alpha k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)}{1+n}$$

que depende tan solo de los valores que escojamos para α, β, n y δ.

4. Extensiones del Modelo de Crecimiento Neoclásico

4.1. Introducción del Gobierno

El Modelo de Crecimiento Neoclásico puede ser usado para evaluar los efectos dinámicos de distintas políticas económicas. Para ello, debemos introducir un agente adicional, el gobierno, que financia sus gastos mediante la recaudación de impuestos y posiblemente emisión de bonos. Más adelante veremos como introducir dinero en esta economía.

Vamos a suponer que el gobierno tiene únicamente una función redistributiva. Sus ingresos provienen de impuestos al ingreso, consumo e inversión, pagados por las familias. Sus gastos consisten únicamente en transferencias *lump-sum* a las mismas familias. El déficit corriente generado es financiado mediante la emisión de bonos, vendidos a las familias a un precio q.

La restricción presupuestaria de las familias es entonces:

$$(1+\tau_c)c_t + (1+\tau_i)i_t + q_t b_{t+1} = (1-\tau_y)\left[w_t + r_t k_t\right] + b_t + T_t \tag{4.1}$$

en donde T_t representa el monto de la transferencia por trabajador, y b_t el monto de bonos comprados al gobierno en el perído $t-1$, también por trabajador. Por su parte, la restricción presupuestaria del gobierno es:

$$T_t + b_t = \tau_c c_t + \tau_i i_t + \tau_y\left[w_t + r_t k_t\right] + q_t b_{t+1} \tag{4.2}$$

El resto del modelo permanece igual.

Un *Equilibrio General Competitivo* (EGC) para esta economía es un conjunto de secuencias para las cantidades c_t, i_t, y_t, k_{t+1}, T_t y b_{t+1} y precios w_t, r_t y q_t, junto con los números τ_c, τ_i y τ_y, tales que:

i) Dados $k_0 > 0$, $b_0 > 0$, T_t, q_t, w_t y r_t, las secuencias c_t, i_t, k_{t+1} y b_{t+1} resuelven el problema:

$$\max \qquad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(c_t\right) \tag{4.3}$$

$$\begin{array}{lrcl} s.t. & (1+\tau_c)c_t + (1+\tau_i)i_t + q_t b_{t+1} & = & (1-\tau_y)\left[w_t + r_t k_t\right] + b_t + T_t \\ & (1+n)\,k_{t+1} & = & (1-\delta)\,k_t + i_t \qquad \forall t \end{array}$$

ii) En cada período t, dados w_t y r_t, los valores y_t y k_t resuelven el problema:

$$\max \qquad y_t - w_t - r_t k_t \tag{4.4}$$

$$s.t. \qquad y_t = f\left(k_t\right)$$

iii) En cada período t, el gobierno satisface la restricción presupuestaria:

$$T_t + b_t = \tau_c c_t + \tau_i i_t + \tau_y\left[w_t + r_t k_t\right] + q_t b_{t+1} \tag{4.5}$$

iv) En cada período t, hay igualdad entre oferta y demanda:

$$y_t = c_t + i_t \tag{4.6}$$

Nótese que estamos automáticamente asumiendo que los mercados de trabajo, capital y bonos del gobierno están en equilibrio, y que los beneficios de la firma son iguales a cero.

Puesto que el gobierno solo redistribuye recursos, la defínción del *Optimo de Pareto* (OP) para esta economía sigue siendo la misma: un conjunto de secuencias para las cantidades c_t, i_t y k_{t+1} que, dado $k_0 > 0$, resuelven el problema del planificador social:

$$\max \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} s.t. \qquad c_t + i_t &= f(k_t) && \forall t \\ (1+n)\,k_{t+1} &= (1-\delta)\,k_t + i_t && \forall t \end{aligned}$$

Dado que los impuestos introducen distorsiones en la economía, ya no existe una equivalencia entre el EGC y el OP. Debemos resolver entonces directamente el Equilibrio Competitivo.

Empecemos resolviendo el problema de la familia representativa, cuyo lagrangeano está dado por:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{t=0}^{\infty} \Big[\beta^t u(c_t) - \lambda_{1t}\left((1+\tau_c)c_t + (1+\tau_i)i_t + q_t b_{t+1} - (1-\tau_y)\left[w_t + r_t k_t\right]\right. \\ &\quad \left. - b_t - T_t\right) - \lambda_{2t}\left((1+n)\,k_{t+1} - (1-\delta)\,k_t - i_t\right)\Big] \end{aligned}$$

con condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \beta^t u'(c_t) - \lambda_{1t}(1+\tau_c) = 0 \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial i_t} = -\lambda_{1t}(1+\tau_i) + \lambda_{2t} = 0 \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} = \lambda_{1t+1}(1-\tau_y)r_{t+1} - \lambda_{2t}(1+n) + \lambda_{2t+1}(1-\delta) = 0 \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_{t+1}} = -\lambda_{1t}q_t + \lambda_{1t+1} = 0 \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{1t}} = (1+\tau_c)c_t + (1+\tau_i)i_t + q_t b_{t+1} - (1-\tau_y)\left[w_t + r_t k_t\right] - b_t - T_t = 0 \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{2t}} = (1+n)\,k_{t+1} - (1-\delta)\,k_t - i_t = 0 \tag{4.13}$$

y condiciones de transversalidad:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} v_t k_t &= 0 \\ \lim_{t\to\infty} z_t b_t &= 0 \end{aligned}$$

en donde $z_t = \prod_{j=t}^{\infty} \frac{1}{q_j}$ representa el valor de un bono del gobierno.

Combinando (4.8) - (4.10), obtenemos la Ecuación de Euler:

$$\frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} = \frac{\frac{(1-\tau_y)r_{t+1}}{(1+\tau_i)} + (1-\delta)}{1+n} \tag{4.14}$$

y de (4.12) y (4.13), la condición:

$$\begin{aligned} (1+\tau_c)c_t &= (1-\tau_y)\left[w_t + r_t k_t\right] + \left[b_t - q_t b_{t+1}\right] + T_t \\ &\quad -(1+\tau_i)\left[(1+n)\,k_{t+1} - (1-\delta)\,k_t\right] \end{aligned} \tag{4.15}$$

Adicionalmente, de (4.8) y (4.11) obtenemos:

$$q_t = \frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \tag{4.16}$$

que nos da el precio de los bonos del gobierno.

Del problema de la firma obtenemos como es usual:

$$r_t = f'(k_t) \tag{4.17}$$

$$w_t = f(k_t) - f'(k_t)\,k_t \tag{4.18}$$

y combinando (4.14), (4.15), (4.17) y (4.18) mas la restricción presupuestaria del gobierno (4.5), obtenemos finalmente el sistema:

$$\frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} = \frac{\frac{(1-\tau_y)\,f'(k_t)}{(1+\tau_i)} + (1-\delta)}{1+n} \tag{4.19}$$

$$c_t = f(k_t) - (1+n)\,k_{t+1} + (1-\delta)\,k_t \tag{4.20}$$

$$
\begin{aligned}
[q_t b_{t+1} - b_t] &= T_t - (\tau_c + \tau_y) f(k_t) \\
&\quad - (\tau_i - \tau_c) [(1+n) k_{t+1} - (1-\delta) k_t] \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

Nótese que las dos primeras ecuaciones del sistema son similares a las que se obtendrían resolviendo el OP (que es equivalente al EGC sin gobierno) con la excepción de que el producto marginal del capital en la ecuación de Euler está ajustado por los impuestos al ingreso y a la inversión. Podemos ver también que el impuesto al consumo y el monto de las transferencias no tienen efectos sobre el stock del capital, el ingreso ni el propio consumo, sólo sobre la cantidad de bonos emitidos.

En estado estacionario, tenemos de (4.19) que:

$$
f'(k^*) = \frac{1+\tau_i}{1-\tau_y} \left[\frac{1+n}{\beta} - (1-\delta) \right]
$$

y puesto que f' es decreciente, podemos mostrar que un aumento en τ_i o τ_y reduce el stock de capital por trabajador k^*, luego el ingreso y consumo de estado estacionario. Comparando con el OP, esta economía con distorsiones lleva a un stock de capital por debajo del nivel socialmente óptimo.

Por ultimo, a partir de (4.16) y (4.21) sabemos que en estado estacionario $q^* = \beta$, y además:

$$
[\beta b^* - b^*] = T^* - (\tau_c + \tau_y) f(k^*) - (\tau_i - \tau_c)(n+\delta) k^*
$$

de donde:

$$
b^* = \frac{T^* - (\tau_c + \tau_y) f(k^*) - (\tau_i - \tau_c)(n+\delta) k^*}{\beta - 1}
$$

lo que nos da la cantidad de bonos que el gobierno emite período a período para financiar su déficit en estado estacionario.

4.2. Decisión Trabajo-Ocio

En el Modelo de Crecimiento Neoclásico básico, la oferta de trabajo es exógena y en particular no responde a cambios en en salario real. Una extensión natural consiste en endogenizar la cantidad de horas destinadas al mercado laboral, introduciendo la decisión trabajo-ocio.

Para ello, supongamos que las preferencias de la familia representativa están descritas por la función de utilidad intertemporal:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(\frac{C_t}{L_t}, \frac{L_t - L_t^s}{L_t}\right) \tag{4.22}$$

en donde L_t^s representa la oferta total de trabajo de la familia, luego $L_t - L_t^s$ representa el tiempo de ocio. Asumimos que $u_1 > 0$, $u_2 > 0$, $u_{11} < 0$, $u_{22} < 0$ y $u_{21} > 0$.

Como es habitual, vamos a expresar el modelo en forma intensiva, dividiendo todas las variables por el tamaño L_t de la familia (no por la oferta de trabajo L_t^s). La función de utilidad de un período queda como:

$$u\left(c_t, 1 - l_t\right)$$

en donde l_t es la oferta de trabajo de cada miembro de la familia. La restricción presupuestaria es entonces:

$$c_t + i_t = w_t l_t + r_t k_t$$

asumiendo como siempre que los beneficios son cero, y la función de producción:

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = F\left(\frac{K_t}{L_t}, \frac{L_t^s}{L_t}\right) = F\left(k_t, l_t\right) \tag{4.23}$$

Por lo demás, el resto del modelo se mantiene igual.

Un *Equilibrio General Competitivo* (EGC) para esta economía es un conjunto de secuencias para las cantidades c_t, i_t, l_t, y_t y k_{t+1} y los precios w_t y r_t tales que:

i) Dados $k_0 > 0$,w_t y r_t, las secuencias c_t, l_t, i_t y k_{t+1} resuelven el problema:

$$\max \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(c_t, 1 - l_t\right) \tag{4.24}$$

$$\begin{array}{llll} s.t. & c_t + i_t & = & w_t l_t + r_t k_t & \forall t \\ & (1+n)\, k_{t+1} & = & (1-\delta)\, k_t + i_t & \forall t \end{array}$$

ii) En cada período t, dados w_t y r_t, los valores y_t, k_t y l_t resuelven el problema:

$$\max \quad y_t - w_t l_t - r_t k_t \tag{4.25}$$

$$s.t. \quad y_t = F\left(k_t, l_t\right)$$

iii) En cada período t, hay igualdad entre oferta y demanda:

$$y_t = c_t + i_t \tag{4.26}$$

Nótese que al igual que antes estamos automáticamente asumiendo que los mercados de trabajo y capital están en equilibrio, y que los beneficios de la firma son iguales a cero.

De otro lado, un *Optimo de Pareto* (OP) para esta economía es un conjunto de secuencias para las cantidades c_t, l_t, i_t y k_{t+1} que, dado $k_0 > 0$, resuelven el problema del planificador social:

$$\max \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(c_t, 1 - l_t\right) \tag{4.27}$$

$$\begin{array}{llll} s.t. & c_t + i_t & = & F\left(k_t, l_t\right) & \forall t \\ & (1+n)\, k_{t+1} & = & (1-\delta)\, k_t + i_t & \forall t \end{array}$$

La función lagrangeana intertemporal para este problema está dada por:

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \left[\beta^t u\left(c_t, 1 - l_t\right) - \lambda_{1t}\left(c_t + i_t - F\left(k_t, l_t\right)\right) - \lambda_{2t}\left(\left(1+n\right)k_{t+1} - \left(1-\delta\right)k_t - i_t\right) \right]$$

con condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \beta^t u_1\left(c_t, 1-l_t\right) - \lambda_{1t} = 0 \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial l_t} = -\beta^t u_2\left(c_t, 1-l_t\right) + \lambda_{1t} F_L\left(k_t, l_t\right) = 0 \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial L}{\partial i_t} = -\lambda_{1t} + \lambda_{2t} = 0 \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} = \lambda_{1t+1} F_K\left(k_{t+1}, l_{t+1}\right) - \lambda_{2t}(1+n) + \lambda_{2t+1}(1-\delta) = 0 \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{1t}} = c_t + i_t - F\left(k_t, l_t\right) = 0 \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{2t}} = \left(1+n\right)k_{t+1} - \left(1-\delta\right)k_t - i_t = 0 \quad (4.33)$$

más la condición de transversalidad habitual.

Combinando estas ecuaciones, obtenemos la Ecuación de Euler:

$$\frac{u_1\left(c_t, 1-l_t\right)}{\beta u_1\left(c_{t+1}, 1-l_{t+1}\right)} = \frac{F_K\left(k_{t+1}, l_{t+1}\right) + \left(1-\delta\right)}{1+n} \quad (4.34)$$

y la condición:

$$c_t = F\left(k_t, l_t\right) - \left(1+n\right)k_{t+1} + \left(1-\delta\right)k_t \quad (4.35)$$

más una ecuación adicional, obtenida de (4.28) y (4.29):

$$u_1\left(c_t, 1-l_t\right) = \frac{u_2\left(c_t, 1-l_t\right)}{F_L\left(k_t, l_t\right)} \quad (4.36)$$

que dice que la utilidad marginal del consumo debe igualar a la utilidad marginal del ocio, dividida por el costo de oprtunidad del ocio en unidades de consumo (dada por F_L, que como veremos es igual al salario real). Esta relación nos define implícitamente una función de oferta de trabajo que depende positivamente del salario real.

Los precios que convierten el OP anterior en un EGC se obtienen del problema de la firma, de donde:

$$\begin{aligned} r_t &= F_K\left(k_t, l_t\right) && (4.37) \\ w_t &= F_L\left(k_t, l_t\right) && (4.38) \end{aligned}$$

El estado estacionario, en donde todas las variables por trabajador permanecen constantes, está caracterizado por el sistema:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{F_K\left(k^*, l^*\right) + (1-\delta)}{1+n} \tag{4.39}$$

$$c^* = F\left(k^*, l^*\right) - (n+\delta)\, k^* \tag{4.40}$$

$$u_1\left(c^*, 1-l^*\right) = \frac{u_2\left(c^*, 1-l^*\right)}{F_L\left(k^*, l^*\right)} \tag{4.41}$$

que podemos resolver para k^*, l^* y c^*.

A modo de ilustración, consideremos un caso particular de la economía descrita anteriormente, en el cual:

$$\begin{aligned} u(c_t) &= \log c_t - \frac{l_t^\eta}{\eta} \\ F(k_t, l_t) &= k_t^\alpha l_t^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Las ecuaciones (4.39) - (4.41) de estado estacionario se convierten en el sistema:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha\left(\frac{k^*}{l^*}\right)^{\alpha-1} + (1-\delta)}{1+n}$$

$$c^* = \left(\frac{k^*}{l^*}\right)^\alpha l^* - (n+\delta)\, k^*$$

$$\frac{1}{c^*} = \frac{(l^*)^{\eta-1}}{(1-\alpha)\left(\frac{k^*}{l^*}\right)^{\alpha}}$$

Resolviendo el sistema anterior, obtenemos:

$$\left(\frac{k^*}{l^*}\right) = \left[\frac{\alpha}{\frac{1+n}{\beta} - (1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{4.42}$$

de donde podemos expresar l^* en función del ratio $\left(\frac{k^*}{l^*}\right)$:

$$l^* = \left[\frac{(1-\alpha)}{1-(n+\delta)\left(\frac{k^*}{l^*}\right)^{1-\alpha}}\right]^{\frac{1}{\eta}} \tag{4.43}$$

y el resto de variables en función de l^* y $\left(\frac{k^*}{l^*}\right)$:

$$k^* = \left(\frac{k^*}{l^*}\right) l^* \tag{4.44}$$

$$c^* = \left[\left(\frac{k^*}{l^*}\right)^{\alpha} - (n+\delta)\left(\frac{k^*}{l^*}\right)\right] l^* \tag{4.45}$$

Nótese que un aumento en el parámetro η (que representa el grado de utilidad del ocio) reduce en estado estacionario la oferta de trabajo, el stock de capital y el consumo por miembro de la familia en la misma proporción.

4.3. Cambio Tecnológico y Crecimiento Exógeno

El Modelo de Crecimiento Neoclásico básico tiene como característica que en estado estacionario el producto por trabajador se mantiene constante. En otras palabras, no hay "crecimiento" (en el sentido comúnmente aceptado) en el largo plazo.

Una manera de introducir crecimiento de largo plazo es incorporando progreso técnico en la función de producción. Por conveniencia, asumimos que el cambio tecnológico es exógeno y afecta la productividad del trabajo. Redefinimos la función de producción como:

$$F(K_t, A_t L_t)$$

en donde A_t mide el nivel tecnológico, y evoluciona de acuerdo a:

$$A_{t+1} = (1+g)A_t$$

en donde g es la tasa (exógenamente dada) de progreso técnico. Por simplicidad, asumimos $A_0 = 1$.

Para facilitar el análisis, vamos a dividir todas las variables por $A_t L_t$ de manera tal que queden expresadas en unidades del único bien por *unidades efectivas de trabajo*. Por ejemplo:

$$\hat{c}_t = \frac{C_t}{A_t L_t} = \frac{c_t}{A_t}$$

mide el consumo ya no por trabajador, sino por unidades efectivas de trabajo.

Con esta transformación, la función de producción sigue siendo:

$$\hat{y}_t = f(\hat{k}_t) = F\left(\frac{K_t}{A_t L_t}, 1\right)$$

mientras que la restricción presupuestaria de las familias es:

$$\hat{c}_t + \hat{i}_t = \hat{w}_t + r_t \hat{k}_t$$

en donde $\hat{w}_t = \frac{w_t}{A_t}$ es el salario por unidad efectiva de trabajo, y el capital evoluciona de acuerdo a:

$$(1+g)(1+n)\hat{k}_{t+1} = (1-\delta)\hat{k}_t + \hat{i}_t$$

La única complicación surge con la función de utilidad, que queremos expresar como una función del consumo por unidades efectivas de trabajo $\hat{c}$. Si bien es posible hacer un análisis más general, vamos a especializar el modelo al caso:

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

En este caso, tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t A_t^{1-\sigma} \frac{\hat{c}_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \hat{\beta}^t u(\hat{c}_t)
\end{aligned}$$

en donde $\hat{\beta} = \beta(1+g)^{1-\sigma}$.

De esta manera, hemos redefinido las variables del modelo de manera tal que su estructura sea similar a la del Modelo de Crecimiento Neoclásico básico. Por lo tanto, la definición de equilibrio y las condiciones de primer orden serán las mismas. En particular, podemos obtener la ecuación de Euler:

$$\frac{u'(\hat{c}_t)}{\hat{\beta} u'(\hat{c}_{t+1})} = \frac{f'(\hat{k}_t) + (1-\delta)}{(1+n)(1+g)} \tag{4.46}$$

y la condición:

$$\hat{c}_t = f(\hat{k}_t) - (1+n)(1+g)\,\hat{k}_{t+1} + (1-\delta)\,\hat{k}_t \tag{4.47}$$

Asimismo, sabemos que en largo plazo la economía converge hacia un estado estacionario, en donde $\hat{k}_t$ y $\hat{c}_t$ permanecen constantes con niveles dados por:

$$\begin{aligned}
f'(\hat{k}^*) &= \frac{(1+n)(1+g)}{\hat{\beta}} - (1-\delta) \\
&= \frac{(1+n)(1+g)^{\sigma}}{\beta} - (1-\delta) \qquad (4.48)
\end{aligned}$$

y además:

$$\hat{c}^* = f(\hat{k}^*) - (\delta + n + g + ng)\hat{k}^* \tag{4.49}$$

Nótese, sin embargo, que a diferencia del Modelo de Crecimiento Neoclásico, en estado estacionario todas las variables por trabajador crecen a la misma tasa constante g (*senda de crecimiento balanceado*). Es decir, hemos conseguido crecimiento de largo plazo, pero a una tasa que esta dada exógenamente por la tasa de progreso técnico y que es independiente de otros parámetros (por ejemplo, de variables de política). Por ello, se trata de un modelo de *Crecimiento Exógeno*.

4.4. Un Modelo Simple de Crecimiento Endógeno

La literatura de *Crecimiento Endógeno* busca construir modelos en los cuales la tasa de crecimiento de las variables por trabajador sea un resultado de la optimización de los agentes, y por lo tanto pueda ser afectada por variables de política.

El más simple de estos modelos es conocido como el *modelo Ak*. Se trata de una versión del Modelo de Crecimiento Neoclásico básico con la función de producción:

$$F(K_t, L_t) = AK_t$$

que podemos reescribir en forma intensiva como:

$$f(k_t) = Ak_t$$

Nótese que esta función de producción (i) ya no depende del trabajo, luego en equilibrio tendremos $w_t = 0$; (ii) sigue exhibiendo rendimientos a escala constantes; y (iii) ya no presenta rendimientos decrecientes en el capital (en equilibrio, $r_t = A$, independientemente de k_t).

La definición de equilibrio y las condiciones de primer orden siguen siendo las mismas. En particular, podemos obtener la ecuación de Euler:

$$\frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} = \frac{A + (1 - \delta)}{1 + n} \tag{4.50}$$

y la condición:

$$c_t = Ak_t - (1+n)\,k_{t+1} + (1-\delta)\,k_t \tag{4.51}$$

La diferencia con el Modelo de Crecimiento Neoclásico básico es que no existe en general un estado estacionario en donde k_t y c_t permanecen constantes, pues la ecuación (4.50) implicaría que:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{A + (1-\delta)}{1+n} \tag{4.52}$$

lo cual no tiene necesariamente que ser cierto (no hay ninguna variable que se ajuste, solo parámetros).

Lo que sí existe en este modelo es una senda de crecimiento balanceado, en donde k_t y c_t crecen a la misma tasa γ. Esta tasa puede encontrarse a partir de la ecuación de Euler. Por ejemplo, en el caso en que:

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

tenemos de (4.50) que:

$$\frac{1}{\beta}\left(\frac{c_t}{c_{t+1}}\right)^{-\sigma} = \frac{(1+\gamma)^{\sigma}}{\beta} = \frac{A + (1-\delta)}{1+n} \tag{4.53}$$

y por lo tanto:

$$\gamma = \left[\beta\frac{A + (1-\delta)}{1+n}\right]^{\frac{1}{\sigma}} - 1 \tag{4.54}$$

nos da la tasa de crecimiento de todas las variables por trabajador en el largo plazo, como una función de los parámetros del modelo.

De otro lado, a partir de (4.51) obtenemos que en la senda de crecimiento balanceado:

$$c_t = [A - (\delta + n + \gamma + n\gamma)]\,k_t \tag{4.55}$$

de donde la tasa de ahorro es constante y dada por:

$$s = \frac{Ak_t - c_t}{Ak_t} = \frac{\delta + n + \gamma + n\gamma}{A} \tag{4.56}$$

Por último, podemos mostrar que en el modelo Ak la convergencia hacia la senda de crecimiento balanceado es instantánea. Es decir, dado cualquier $k_0 > 0$ inicial, el valor de c_0 en equilibrio será tal que inmediatamente se satisfagan (4.53) y (4.55). No existe por lo tanto un período de transición, como en el modelo con crecimiento exógeno.

Esto implica además que el modelo Ak no exhibe *convergencia condicional*, pues la tasa de crecimiento de una economía es independiente de sus condiciones iniciales. Así, por ejemplo, la brecha en ingreso por trabajador entre dos economías con los mismos parámetros pero distintos valores iniciales se mantendrá en el largo plazo, pues ambas crecen a la misma tasa desde el período inicial. Nótese que esto no ocurre en el modelo con crecimiento exógeno, en donde economías con los mismos parámetros pero distintos valores iniciales convergen al mismo nivel de ingreso por trabajador y la misma tasa de crecimiento.

Part II
Ciclos Económicos

5. Ciclos Económicos Reales

5.1. Introducción

El estudio de los ciclos económicos, entendidos como las fluctuaciones de corto plazo de la economía en torno a su senda de crecimiento de largo plazo, recobra importancia a fines de los setenta. Hasta entonces, la tradición keynesiana explicaba estas fluctuaciones a partir de cambios en la demanda agregada que generan desequilibrios temporales en la economía, usando modelos estáticos de corto plazo complementados con mecanismos *ad-hoc* tales como la Curva de Phillips.

Por el contrario, los llamados "nuevos clásicos" buscan entender los ciclos económicos dentro del paradigma del equilibrio general, usando modelos dinámicos con fundamentos microeconómicos. El punto de partida es el Modelo de Crecimiento Neoclásico, que como vimos anteriormente ofrece un marco consistente para analizar el comportamiento de largo plazo de la economía. A este modelo se le incorporan shocks estocásticos para que despliegue fluctuaciones de corto plazo, con lo cual el mismo modelo permite explicar tanto el crecimiento como los ciclos económicos.

Dentro de esta corriente, Kydland y Prescott (1982) construyen un modelo en el cual los impulsos de corto plazo están dados por shocks tecnológicos, y muestran que las características de las fluctuaciones generadas por su modelo (medidas a través de ciertos estadísticos que reflejan la variabilidad, persistencia y correlaciones de las principales variables) son similares a las de los datos de Estados Unidos en la post-guerra. Puesto que el modelo no incluye dinero, a éste y otros estudios que le siguen se les agrupa en la literatura de *Ciclos Económicos Reales (RBC).*

La naturaleza de los shocks que generan los ciclos económicos es uno de los puntos principales en la agenda de investigación actual. Diversos autores usan una metodología similar para analizar fuentes alternativas de fluctuaciones, tales como shocks monetarios, shocks internacionales e incluso shocks de demanda al estilo keynesiano. El debate no está cerrado, pero existe cada vez un mayor consenso acerca de los términos en los cuales debe llevarse a cabo.

5.2. Representación de los Ciclos Económicos

Cualquier análisis cuantitativo de los ciclos económicos debe partir por distinguir el crecimiento de largo plazo (tendencia) de las fluctuaciones de corto plazo (ciclos) en las variables económicas de interés.

Dada una serie de observaciones de la variable Y_t $(t = 1, ...T)$, existen varios métodos para separar la tendencia del ciclo. En ellos se asume normalmente que podemos expresar Y_t como el producto de un componente de tendencia Y_t^g y un componente cíclico Y_t^c:

$$Y_t = Y_t^g \times Y_t^c$$

o, tomando logaritmos:

$$y_t = y_t^g + y_t^c$$

en donde las variables en minúscula representan el logaritmo de la variable original.

El método más usado en la literatura de RBC es el filtro de Hodrick-Prescott (HP), que consiste en hallar una serie y_t^g que minimice:

$$\sum_{t=1}^{T} (y_t - y_t^g)^2 + \lambda \sum_{t=1}^{T} \left[(y_{t+1}^g - y_t^g) - (y_t^g - y_{t-1}^g) \right]^2 \tag{5.1}$$

El parámetro λ mide el peso que se le da en la minimización a la suavidad de y_t^g en relación a su cercanía a la serie original y_t . Si $\lambda = 0$ tenemos que y_t^g es igual a y_t (no se le da ningún peso a la suavidad), mientras que cuando $\lambda \to \infty$, y_t^g tiende a una linea recta (todo el peso en la suavidad). Para datos trimestrales, se recomienda el valor $\lambda = 1600$. Una vez hallado y_t^g, el componente cíclico se encuentra usando $y_t^c = y_t - y_t^g$.

El siguiente paso en la representación de los ciclos económicos consiste en encontrar regularidades en el comportamiento de los componentes cíclicos de las principales variables macroeconómicas, tales como producto, consumo, inversión y empleo. Para ello se suelen usar series trimestrales, ajustadas usando el filtro HP. Estas regularidades constituyen los hechos estilizados que cualquier modelo que busque explicar los ciclos económicos debe satisfacer.

Por ejemplo, para la economía de Estados Unidos se reconocen los siguientes hechos estilizados:

- El consumo, la inversión y el empleo son procíclicos (están positivamente correlacionados con el producto);
- El consumo es menos volatil (tiene menor varianza) que el producto;
- La inversión es más volatil (tiene mayor varianza) que el producto; y
- El empleo tiene la misma variabilidad que el producto.

5.3. Un Modelo Simple de RBC

A fin de ilustrar la metodología seguida en la literatura de RBC, vamos a trabajar con una versión simple del modelo de Kydland y Prescott (1982). Este es a su vez una versión del Modelo de Crecimiento Neoclásico con cambio técnico exógeno y decisión trabajo-ocio, al cual se le incorporan shocks tecnológicos que afectan la función de producción. La naturaleza de estos shocks es estocástica, luego sus realizaciones no son conocidas (aunque si predecidas) por los agentes.

La estructura del modelo, con todas las variables expresadas en unidades del único bien por unidades de trabajo efectivo, es similar a la de los modelos vistos anteriormente. Las preferencias de las familias están descritas por la función de utilidad intertemporal:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - l_t)$$

su restricción presupuestaria para el periodo t es:

$$c_t + i_t = w_t l_t + r_t k_t$$

y la regla de acumulación del capital:

$$(1+n)(1+\gamma) k_{t+1} = (1-\delta) k_t + i_t$$

en donde n es la tasa de crecimiento de la población y γ la tasa de progreso técnico, ambas exógenas.

El único cambio se da en la función de producción, que es ahora:

$$y_t = e^{z_t} F\left(k_t, l_t\right) \tag{5.2}$$

en donde z_t es un shock tecnológico que afecta la tasa de crecimiento de la productividad total de los factores, y que sigue el proceso autoregresivo:

$$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_{t+1} \tag{5.3}$$

en donde ε_t es un ruido blanco con varianza σ^2. Suponemos que z_t es conocido a comienzos del período t, antes de tomar cualquier decisión en ese período.

Antes de definir un equilibrio para esta economía, es necesario introducir cierta notación. Si z_t corresponde al shock tecnológico ocurrido en el periodo t, el vector $z^t = (z_0, z_1, ..., z_t)$ denota la *historia* de todos los shocks ocurridos hasta el período t. Un *plan contingente* para la variable x, que denotamos $x(z^t)$, es una función en el conjunto de posibles historias. Es decir, $x(z^t)$ nos da el valor de x previsto para el periodo t en caso que ocurriese la historia de shocks z^t.

Dado que las familias no conocen cuales serán las realizaciones de z_t en el futuro (y por lo tanto no conocen los precios futuros), lo mejor que pueden hacer es escoger planes contingentes para el consumo, la inversión y la oferta de trabajo que maximizen su *utilidad esperada*.

Un *Equilibrio General Competitivo Estocástico* (EGCE) para esta economía es un conjunto de planes contingentes para las cantidades $c(z^t)$, $i(z^t)$, $l(z^t)$, $y(z^t)$ y $k(z^t)$, junto con los precios contingentes $w(z^t)$ y $r(z^t)$, tales que:

i) Dados z_0, $k_0 \equiv k(z^{-1}) > 0$, $w(z^t)$ y $r(z^t)$, los planes contingentes $c(z^t)$, $l(z^t)$, $i(z^t)$ y $k(z^t)$ resuelven el problema:

$$\max \qquad E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(c(z^t), 1 - l(z^t)\right) \tag{5.4}$$

$$\begin{array}{lrcll} s.t. & c(z^t) + i(z^t) & = & w(z^t)l(z^t) + r(z^t)k(z^{t-1}) & \forall z^t,\ \forall t \\ & (1+n)(1+\gamma)\,k(z^t) & = & (1-\delta)\,k(z^{t-1}) + i(z^t) & \forall z^t,\ \forall t \\ & z_{t+1} & = & \rho z_t + \varepsilon_{t+1} & \forall t \end{array}$$

en donde ε_t es un ruido blanco con varianza σ^2.

ii) Para cada historia z^t en cada periodo t, dados $w(z^t)$ y $r(z^t)$, los valores $y(z^t)$, $k(z^{t-1})$ y $l(z^t)$ resuelven el problema:

$$\max \qquad y(z^t) - w(z^t)l(z^t) - y(z^t)k(z^{t-1}) \tag{5.5}$$

$$s.t. \qquad y(z^t) = e^{z_t} F\left(k(z^{t-1}), l(z^t)\right)$$

iii) Para cada historia z^t en cada periodo t, hay igualdad entre oferta y demanda:

$$y(z^t) = c(z^t) + i(z^t) \tag{5.6}$$

De manera similar, podemos definir un *Optimo de Pareto Estocástico* (OPE) para esta economía como un conjunto de planes contingentes para las cantidades $c(z^t)$, $i(z^t)$, $l(z^t)$ y $k(z^t)$ que, dados z_0 y $k_0 \equiv k(z^{-1}) > 0$, resuelven el problema del planificador social:

$$\max \qquad E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(c(z^t), 1 - l(z^t)\right) \tag{5.7}$$

$$\begin{array}{lrcll} s.t. & c(z^t) + i(z^t) & = & e^{z_t} F\left(k(z^{t-1}), l(z^t)\right) & \forall z^t,\ \forall t \\ & (1+n)(1+\gamma)\, k(z^t) & = & (1-\delta)\, k(z^{t-1}) + i(z^t) & \forall z^t,\ \forall t \\ & z_{t+1} & = & \rho z_t + \varepsilon_{t+1} & \forall t \end{array}$$

en donde ε_t es un ruido blanco con varianza σ^2.

Nótese que tanto el EGCE como el OPE nos dan planes contingentes para todas las variables, que son funciones que dependen de las realizaciones de los shocks tecnológicos. Para cada secuencia de realizaciones de estos shocks, tendremos distintas trayectorias de las variables que nos interesan.

5.4. Calibración del Modelo

El modelo anterior es dificil de resolver analíticamente. La alternativa es usar métodos numéricos, para lo cual se necesita especificar las formas funcionales y dar valores a los parámetros del modelo.

Las formas funcionales más usadas en la literatura de RBC son la función de producción Cobb-Douglas:

$$F(k,l) = k^{\alpha} l^{1-\alpha} \tag{5.8}$$

y una función de utilidad de la forma:

$$u(c, 1-l) = (1-\phi)\log c + \phi \log(1-l) \tag{5.9}$$

que es separable en consumo y ocio.

El siguiente paso es escoger valores para los parámetros del modelo, que son α, ϕ, β, δ, n y γ (más adelante nos ocuparemos de ρ y σ). Si bien nada impide la estimación econométrica estructural (es decir, tomando en cuenta las restricciones impuestas por el modelo) de dichos parámetros, un método sencillo usado extensivamente en la literatura es el de la *calibración*.

La idea de la calibración es ajustar los parámetros del modelo de manera tal que el estado estacionario (o la senda de crecimiento balanceado) de la parte determinística (haciendo $z_t = 0$, $\forall t$) sea consistente con algunas observaciones de largo plazo para la economía que estamos analizando. Los pasos a seguir en este modelo sencillo son los siguientes:

1. Obtener n como la tasa de crecimiento promedio de la población.

2. Obtener γ como la tasa de crecimiento promedio del producto per cápita (mejor si es del producto por trabajador).

3. Dados n y γ, obtener β usando información sobre la tasa de interés real promedio i y la relación de estado estacionario:

$$\frac{(1+n)(1+\gamma)}{\beta} = r + (1-\delta) \equiv 1 + i \tag{5.10}$$

4. Obtener α usando información sobre la participación del retorno al trabajo (salarios mas otro tipo de compensaciones) en el producto total, puesto que:

$$1-\alpha=\frac{wL}{Y} \tag{5.11}$$

5. Dados n, γ, α y β, obtener δ usando información sobre la tasa de ahorro $s=1-\frac{C}{Y}$ promedio y la relación de estado estacionario:

$$\begin{aligned} s &= (\delta+n+\gamma+n\gamma)\frac{k}{y}=(\delta+n+\gamma+n\gamma)\frac{\alpha}{r} \\ &= \alpha(\delta+n+\gamma+n\gamma)\left(\frac{(1+n)\,(1+\gamma)}{\beta}-(1-\delta)\right)^{-1} \end{aligned} \tag{5.12}$$

6. Dado α, obtener ϕ usando información sobre la tasa de ahorro s y la proporción del tiempo destinado al mercado de trabajo l (si no se encuentra, se suele asumir $l=0.3$), junto con la relación de estado estacionario:

$$\begin{aligned} \frac{\phi}{1-\phi} &= \left(\frac{1-l}{c}\right)w=\left(\frac{1-l}{l}\right)\left(\frac{wl}{y}\right)\left(\frac{y}{c}\right) \\ &= \left(\frac{1-l}{l}\right)(1-\alpha)\left(\frac{1}{1-s}\right) \end{aligned} \tag{5.13}$$

Nótese que si los datos de largo plazo requeridos para la calibración son anuales, también serán anuales las tasas n, γ, δ y β que se encuentren. Por lo tanto, si el modelo va a ser simulado para reproducir datos trimestrales, n, γ, δ y β deben ser transformados a una frecuencia trimestral. Por ejemplo, una tasa de crecimiento de la población anual del 3% (o 0.03) implica una tasa de crecimiento trimestral de 0.75% (donde $1.0075=(1.03)^{1/4}$).

Nos queda calibrar el proceso estocástico para los shocks tecnológicos, es decir los parámetros ρ y σ. Sabemos que, dada su especificación autoregresiva, los principales momentos para z_t están dados por:

$$Ez_t = 0 \tag{5.14}$$

$$
\begin{aligned}
Ez_t^2 &= \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} && (5.15)\\
Ez_t z_{t-1} &= \frac{\rho\sigma^2}{1-\rho^2} && (5.16)
\end{aligned}
$$

Los shocks tecnológicos corresponden en el modelo al residuo de Solow, medido restando de la tasa de crecimiento del producto las partes explicadas por el crecimiento de los distintos factores de producción:

$$z_t = \log Y_t - \alpha \log K_t - (1-\alpha)\log L_t \tag{5.17}$$

Obteniendo series para el stock de capital y el empleo, podemos calcular una serie para z_t y observar su varianza y primera autocovarianza. Entonces, usando (5.15) y (5.16), podemos encontrar los valores de ρ y σ que sean consistentes con dichas observaciones.

Siguiendo procedimientos similares a los descritos, y usando datos de largo plazo para la economía de Estados Unidos, se encuentran los siguientes valores (trimestrales) para los parámetros:

$n = 0.003$	$\gamma = 0.004$	$\delta = 0.012$
$\alpha = 0.3$	$\beta = 0.99$	$\phi = 0.64$
$\rho = 0.95$	$\sigma = 0.007$	

que son los usados en la literatura de RBC.

5.5. Simulación y Resultados

Una vez obtenidas las formas funcionales y los valores de los parámetros, se puede simular las trayectorias de equilibrio para las variables de interés. Los metodos numéricos usados con mayor frecuencia son el de aproximación *Linear-Cuadrática (LQ)* en torno al estado estacionario, y el de *Elementos Finitos (FEM)*. Ambos son relativamente complejos, por lo que su exposición queda pospuesta para más adelante. En todo caso, una buena referencia es el artículo de Hansen y Prescott (1995).

Los resultados obtenidos simulando el modelo de RBC para la economía de Estados Unidos quedan resumidos en la siguiente tabla:

	Modelo	Datos
$S.D.(y)$	0.0135	0.0172
$S.D.(c)$	0.0033	0.0127
$S.D.(i)$	0.0595	0.0824
$S.D.(l)$	0.0077	0.0159
$Corr(y,c)$	0.85	0.83
$Corr(y,i)$	0.99	0.91
$Corr(y,l)$	0.72	0.86

en donde todas las variables (tanto las observaciones como las obtenidas simulando el modelo) han sido ajustadas mediante el filtro HP para aislar el componente cíclico y están expresadas en logaritmos.

Como se puede apreciar, el modelo simple de RBC con shocks tecnológicos reproduce las correlaciones entre las principales variables observadas en los datos. Asimismo, reproduce alrededor del 70% de la variabilidad observada en el producto. Sin embargo, genera menor variabilidad en el consumo y el empleo que la observada. Con todo, el modelo parece consistente con los hechos estilizados del ciclo económico: tanto el consumo, como la inversión y el empleo son fuertemente procíclicos, y la inversión es más volatil que el consumo y el empleo.

La intuición detrás de estos resultados es la siguiente. Un shock tecnológico positivo aumenta la productividad de los factores, luego el ingreso y el consumo. Al aumentar la rentabilidad del capital, los agentes incrementan fuertemente la inversión (sustitución intertemporal del consumo). Por último, al aumentar los salarios, los agentes ofrecen mayor cantidad de horas de trabajo al mercado (sustitución intertemporal del ocio). Estos efectos generan los patrones de correlación en las variables descritos anteriormente.

Nótese finalmente que si la fuente de fluctuaciones en la economía fuese ya no shocks tecnológicos, sino por ejemplo shocks en las preferencias, obtendríamos resultados completamente distintos. Como un principio general, los patrones de correlación entre las variables en este tipo de modelos depende del tipo de shocks que afectan a la economía, y no son por lo tanto invariantes ante intervenciones de política.

6. Dinero y Ciclos Económicos

6.1. Introducción

El enfoque de Ciclos Económicos Reales ha sido criticado por no incluir elementos monetarios. Observaciones para la economía de Estados Unidos muestran que (i) la cantidad de dinero es fuertemente procíclica; (ii) la velocidad de circulación es también procíclica; (iii) el nivel de precios es contracíclico; pero (iv) la tasa de inflación es procíclica. Estos hechos estilizados no pueden ser capturados por los modelos de RBC, y pueden ser potencialmente importantes para explicar los ciclos económicos.

El estudio de estos fenómenos dentro de la metodología de RBC pasa por resolver el problema de cómo introducir dinero en el Modelo de Crecimiento Neoclásico. La solución no es obvia, pues se necesita que los agentes escojan racionalmente el mantener un stock de dinero entre períodos, renunciando a invertirlo en activos (tales como bonos o nuevo capital) que ofrecen un retorno positivo.

En la última década se han explorado diversas soluciones a este problema. La más sencilla (y menos atractiva teóricamente) es introducir el dinero como un argumento en la función de utilidad de las familias, de manera tal que estas siempre demanden un stock positivo del mismo. Una alternativa con la cual vamos a trabajar es el modelo de *cash-in-advance*, propuesto por Lucas y Stokey (1987), en el cual las familias demandan dinero por motivos transaccionales.

6.2. El Modelo de Cash-In-Advance

Vamos a trabajar con una versión simple del Modelo de Crecimiento Neoclásico, al cual le vamos a introducir un gobierno que financia sus gastos mediante la emisión de nuevo circulante (no hay impuestos ni bonos). Su restricción presupuestaria está dada por:

$$p_t g_t = M_{t+1} - M_t$$

en donde el valor nominal de sus gastos debe ser igual a la cantidad de dinero creada en el período. Por simplicidad, vamos a asumir que el gobierno sigue la regla de política monetaria:

$$M_{t+1} = (1+\mu)M_t$$

en donde la cantidad de dinero crece a la tasa constante μ.

Las familias, por su parte, utilizan su ingreso (salarios más renta del capital) para adquirir bienes de consumo e inversión. El punto es que los bienes de consumo deben ser adquiridos con dinero traído del periodo anterior, puesto que deben ser cancelados antes de que las familias reciban su ingreso correspondiente al período. Tenemos entonces la restricción de cash-in-advance:

$$p_t c_t = M_t$$

y la restricción presupuestaria:

$$M_{t+1} + p_t i_t = w_t + r_t k_t$$

de acuerdo a la cual las familias usan su ingreso nominal (en este contexto w_t y r_t son precios monetarios, no relativos) para adquirir bienes de inversión y guardar dinero para el siguiente período.

Un *Equilibrio General Competitivo* (EGC) para esta economía es un conjunto de secuencias para las cantidades c_t, i_t, y_t, k_{t+1}, g_t y M_{t+1}, junto con los precios p_t, w_t y r_t, tales que:

i) Dados $k_0 > 0$, $M_0 > 0$ y los precios p_t, w_t y r_t, las secuencias c_t, i_t, k_{t+1} y M_{t+1} resuelven el problema:

$$\max \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{6.1}$$

$$\begin{array}{llcll} s.t. & M_{t+1} + p_t i_t & = & w_t + r_t k_t & \forall t \\ & p_t c_t & = & M_t & \forall t \\ & (1+n)\,k_{t+1} & = & (1-\delta)\,k_t + i_t & \forall t \end{array}$$

ii) En cada período t, dados p_t, w_t y r_t, los valores y_t y k_t resuelven el problema:

$$\max \qquad p_t y_t - w_t - r_t k_t \tag{6.2}$$

$$s.t. \qquad y_t = f(k_t)$$

iii) En cada período t, el gobierno satisface la restricción presupuestaria:

$$p_t g_t = M_{t+1} - M_t \tag{6.3}$$

y sigue la regla de política monetaria:

$$M_{t+1} = (1+\mu) M_t \tag{6.4}$$

iv) En cada período t, hay igualdad entre oferta y demanda:

$$y_t = c_t + i_t + g_t \tag{6.5}$$

Como veremos más adelante, el gobierno introduce una distorsión en la economía al emitir dinero para financiar sus gastos. Por lo tanto, no podemos usar los Teoremas del Bienestar resolviendo el problema del planificador social, y debemos trabajar directamente con el EGC.

Empecemos resolviendo el problema de la familia representativa, cuyo lagrangeano está dado por:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{t=0}^{\infty} \Big[\beta^t u(c_t) - \lambda_{1t} (M_{t+1} + p_t i_t - w_t - r_t k_t) - \lambda_{2t} (p_t c_t - M_t) \\ &\quad - \lambda_{3t} ((1+n) k_{t+1} - (1-\delta) k_t - i_t) \Big] \end{aligned}$$

con condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \beta^t u'(c_t) - \lambda_{2t} p_t = 0 \tag{6.6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial i_t} = -\lambda_{1t} p_t + \lambda_{3t} = 0 \tag{6.7}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} &= \lambda_{1t+1}r_{t+1} - \lambda_{3t}(1+n) + \lambda_{3t+1}(1-\delta) = 0 && (6.8)\\
\frac{\partial L}{\partial M_{t+1}} &= -\lambda_{1t} + \lambda_{2t+1} = 0 && (6.9)\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_{1t}} &= M_{t+1} + p_t i_t - w_t - r_t k_t = 0 && (6.10)\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_{2t}} &= p_t c_t - M_t && (6.11)\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_{3t}} &= (1+n)\, k_{t+1} - (1-\delta)\, k_t - i_t = 0 && (6.12)
\end{aligned}
$$

y las condiciones de transversalidad habituales.

De (6.6) - (6.9) podemos obtener la ecuación de Euler:

$$
\frac{u'\left(c_{t+1}\right)}{\beta u'\left(c_{t+2}\right)} = \left(\frac{p_{t+1}}{p_t}\right)\left(\frac{p_{t+1}}{p_{t+2}}\right)\frac{\frac{r_{t+1}}{p_{t+1}} + (1-\delta)}{1+n} \qquad (6.13)
$$

que iguala la tasa marginal de sustituición intertemporal al ratio de los rendimientos (medidos en unidades de consumo) de invertir una unidad monetaria en nuevo capital y de guardarla como dinero hasta el siguiente período.

De la restricción de cash-in-advance de las familias (6.11) tenemos:

$$
p_t y_t = \left(\frac{y_t}{c_t}\right) M_t \qquad (6.14)
$$

una versión simple de la *ecuación cuantitativa del dinero*, con velocidad de circulación igual a $\left(\frac{y_t}{c_t}\right)$.

Por último, del problema de la firma obtenemos como es usual:

$$
\begin{aligned}
r_t &= p_t f'\left(k_t\right) && (6.15)\\
w_t &= p_t\left[f\left(k_t\right) - f'\left(k_t\right) k_t\right] && (6.16)
\end{aligned}
$$

que reemplazando en (6.13) nos da:

$$
\frac{u'\left(c_{t+1}\right)}{\beta u'\left(c_{t+2}\right)} = \left(\frac{p_{t+1}}{p_t}\right)\left(\frac{p_{t+1}}{p_{t+2}}\right)\frac{f'\left(k_{t+1}\right) + (1-\delta)}{1+n} \qquad (6.17)
$$

6.3. Estado Estacionario y Neutralidad del Dinero

Vamos a analizar ahora el estado estacionario del modelo, en donde todas las cantidades por trabajador se mantienen constantes. De (6.14) podemos ver que, si el consumo por trabajador es constante, la tasa de inflación debe ser igual a la tasa de crecimiento de la oferta monetaria μ. Asimismo, de (6.15) y (6.16) vemos que los precios de los factores de producción deben crecer a esa misma tasa μ.

Usando la ecuación de Euler (6.17), tenemos que en estado estacionario:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{f'(k^*) + (1-\delta)}{1+n} \tag{6.18}$$

luego cambios en la tasa de crecimiento de la oferta monetaria no afectan el nivel de capital por trabajador (ni el ingreso por trabajador) de estado estacionario. En ese sentido, el dinero es *neutral* en el largo plazo.

De la restricción presupuestaria del gobierno (6.3), la regla de política monetaria (6.4) y la ecuación cuantitativa (6.14), obtenemos en estado estacionario:

$$g^* = \mu c^* \tag{6.19}$$

Reemplazando en la ecuación de cierre del mercado de bienes (6.5):

$$c^* = \frac{f(k^*) - (n+\delta)k^*}{1+\mu} \tag{6.20}$$

vemos que un aumento en la tasa de crecimiento de la oferta monetaria aumenta el gasto de gobierno y reduce el consumo de las familias en la misma magnitud.

En resúmen, en este modelo el gobierno puede expandir su gasto (o déficit) financiándolo mediante emisión de dinero. En el largo plazo, esta política expansiva no afectará la inversión ni el nivel de producto, pero sí su composición: el consumo de las familias se verá reducido en la misma magnitud que el aumento en el déficit fiscal. El mecanismo mediante el cual el gobierno obliga a las familias a reducir su consumo es mediante un aumento en los precios, que reduce el valor real del stock de dinero. De esta manera, la emisión en este modelo funciona como un *impuesto inflacionario* al consumo.

6.4. Ciclos Económicos Monetarios

Cooley y Hansen (1995) analizan las fluctuaciones generadas por un modelo de cash-in-advance sujeto tanto a shocks tecnológicos como shocks monetarios. Los primeros afectan la función de producción, al igual que en la literatura de RBC. Los shocks monetarios, por su parte, afectan la tasa de emisión de dinero. Es decir, μ sigue un proceso estocástico descrito por:

$$\mu_{t+1} = \eta\mu_t + \xi_{t+1}$$

que asumimos independiente al proceso seguido por los shocks tecnológicos.

El modelo es calibrado para los datos de largo plazo de la economía de Estados Unidos, resuelto numéricamente y simulado para 150 trimestres. Los estadísticos obtenidos de la simulación son comparados con los obtenidos en el modelo simple de RBC (sin shocks monetarios) y con los datos para la economía de Estados Unidos en la post-guerra. Los principales resultados son:

- Las variables reales (producto, inversión, consumo y empleo) tienen una varianza similar en ambos modelos y reproducen los patrones de correlación observado en los datos.
- En cuanto a las variables nominales, el nivel de precios y la inflación son mucho más variables en el modelo con shocks monetarios que en los datos.
- Adicionalmente, en el modelo con shocks monetarios se obtiene que el nivel de precios es contracíclico y la velocidad de circulación procíclica, tal como se observa. Sin embargo, se obtiene también que la tasa de inflación es contracíclica, lo cual no se observa.

Los primeros dos resultados muestran que la introducción de shocks monetarios en el contexto de un modelo de cash-in-advance agrega muy poco a la explicación de las fluctuaciones en las variables reales (que siguen siendo explicadas básicamente por shocks tecnológicos) y genera al mismo tiempo demasiada variabilidad en las variables nominales. Esto tiene que ver, por supuesto, con las propiedades de neutralidad del dinero en este modelo, por lo cual los shocks monetarios son acomodados principalmente por movimientos en precios y no en cantidades.

Un punto importante dentro del debate actual sobre los Ciclos Económicos tiene que ver con la construcción de modelos de economías con dinero en los cuales los shocks monetarios no generen una excesiva variabilidad en los precios. En ese sentido, los llamados "nuevos keynesianos" proponen la introducción de rigideces nominales (como contratos de largo plazo, costos de menú, etc.) que eviten el ajuste automático de los precios y, de paso, eliminen la propiedad de neutralidad del dinero.

En el mismo artículo, Cooley y Hansen testean una alternativa de este tipo. Para ello, utilizan un modelo de cash-in-advance con rigideces en los salarios debidas a la existencia de contratos traslapados (como en Fisher (1977)). El intento no es del todo satisfactorio, sin embargo, pues si bien con esa modificación se reduce la variabilidad del nivel de precios y aumenta la del producto, algunos patrones de correlación entre las variables reales que se obtienen ya no son consistentes con los datos.

Part III
Referencias

References

[1] Barro, Robert y Xavier Sala-i-Martin. *Economic Growth*. New York: McGraw-Hill, 1995.

[2] Cooley, Thomas, ed. *Frontiers of Business Cycle Research*. Princeton: Princeton University Press, 1995.

[3] Cooley, Thomas y Edward Prescott. "Economic Growth and Business Cycle". En Cooley (1995).

[4] Cooley, Thomas and Gary Hansen. "Money and the Business Cycle". En Cooley (1995).

[5] Fisher, Stanley. "Long Term Contracts, Rational Expectations, and the Optimal Money Supply Rule". *Journal of Political Economy*, vol. 85, 1977.

[6] Hansen, Gary y Edward Prescott. "Recursive Methods for Computing Equilibria of Business Cycle Models". En Cooley (1995).

[7] Kydland, Finn y Edward Prescott. "Time to Build and Aggregate Fluctuations". *Econometrica*, vol. 50, 1982.

[8] Lucas, Robert. "Econometric Policy Evaluation: a Critique". En: Brunner, Carl y Allan Meltzer, eds. *The Phillips Curve and Labor Markets*, Vol. 1 of the Carnegie-Rochester Series on Public Policy. Amsterdam: North Holland, 1976.

[9] Lucas, Robert. "Methods and Problems in Business Cycle Theory". *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 12, 1980.

[10] Lucas, Robert y Nancy Stokey. "Money and Interest in a Cash-in-Advance Economy". *Econometrica*, vol. 55, 1987.

[11] Mankiw, Gregory. "A Quick Refresher Course in Macroeconomics". *Journal of Economic Literature*, vol. 28, 1990.

[12] Mankiw, Gregory, David Romer y David Weil. "A Contribution to the Empirics of Economic Growth". *Quarterly Journal of Economics*, vol. 107, 1992.

[13] Prescott, Edward. "Theory Ahead of Business Cycle Measurement". *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, Fall 1986.

[14] Rotemberg, Julio. "The New Keynesian Microfoundations". *NBER Macroeconomics Annual*, 1987.

[15] Sargent, Thomas. *Dynamic Macroeconomic Theory*. Cambridge: Harvard University Press, 1987.

[16] Solow, Robert. "A Contribution to the Theory of Economic Growth". *Quarterly Journal of Economics*, vol. 70, 1956.

Part IV
Apéndices

A. Preguntas de Repaso

A.1. Parte I

Pregunta 1

Considere el nivel de capital por trabajador de estado estacionario k^* en el modelo de crecimiento neoclásico sin distorsiones (obtenido resolviendo el problema del planificador social o el equilibrio competitivo). ¿Es k^* el valor del stock de capital por trabajador que maximiza el consumo por trabajador en estado estacionario?

Pregunta 2

Explique por qué en el modelo de crecimiento neoclásico un impuesto al consumo no tiene efectos sobre el nivel de ingreso por trabajador. ¿Sigue siendo esta conclusión cierta cuando se introduce la decisión trabajo-ocio?

Pregunta 3

Analice los efectos de un impuesto a la inversión sobre la tasa de crecimiento del ingreso por trabajador en el modelo Ak. ¿Qué ocurre en el largo plazo con la brecha entre dos economías con los mismos parámetros pero distintos impuestos a la inversión? ¿Es ésto consistente con la hipótesis de convergencia condicional?

A.2. Parte II

Pregunta 1

Analice los patrones de correlación entre las principales variables (producto, consumo, inversión y empleo) que se obtendrían en un modelo de RBC en el cual en vez de shocks tecnológicos se tiene shocks de preferencias que afectan el factor de descuento β. ¿Son estos patrones de correlación consistentes con los hechos estilizados para la economía de Estados Unidos?

Pregunta 2

En el modelo de cash-in-advance visto en clase el dinero es neutral, en el sentido que cambios en la tasa de crecimiento de la oferta monetaria no afectan el nivel de ingreso por trabajador en el largo plazo. ¿Sigue siendo el dinero neutral si tanto los bienes de consumo como los de inversión deben ser adquiridos con dinero traído del período anterior?

B. Problemas y Ejercicios

B.1. Parte I

Pregunta 1

Considere el Modelo de Crecimiento Neoclásico en su versión más simple, con las siguientes formas funcionales:

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \qquad f(k_t) = k_t^{\alpha}$$

en donde $\sigma > 0$ y $\alpha < 1$ son parámetros dados.

i) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

ii) Caracterice lo mejor posible el Equilibrio Competitivo (halle la ecuación de Euler, etc.)

iii) Halle los valores en estado estacionario para k^*, c^*, y^*, r^*, w^* y la tasa de ahorro s^*.

iv) Dados los siguientes valores para los parámetros:

$$\alpha = 0.3 \quad \beta = 0.95 \quad \sigma = 1.5 \quad \delta = 0.06 \quad n = 0.03$$

Utilizando el método propuesto en la Sección 3.7, y partiendo de $k_0 = 1.5$, grafique la trayectoria de equilibrio para k_t.

v) En base al resultado obtenido en (iv), grafique las trayectorias para c_t, y_t, r_t, w_t, la tasa de ahorro s_t y la tasa de crecimiento de y_t ¿Existe convergencia condicional en este modelo?

Pregunta 2

Considere un modelo de crecimiento en el que existe intermediación financiera. Las firmas son las dueñas del capital y toman las decisiones de inversión. Las familias ahorran depositando unidades del único bien (d_t) en un banco por el cual ganan una tasa de interés pasiva r_t^d. El banco, por su parte, presta unidades del único bien (m_t) a las firmas, a una tasa de interés activa r_t^m. La tecnología financiera está descrita por:

$$m_t = \theta d_t$$

en donde $0 < \theta < 1$ es un parámetro que refleja la eficiencia del sistema bancario (es decir $(1-\theta)d_t$ refleja los recursos perdidos en el proceso de intermediación). El mercado financiero es competitivo, luego los beneficios son cero. Las firmas maximizan el valor presente de sus beneficios, descontados de acuerdo a la tasa de interés activa. Puesto que el mercado de bienes es también competitivo, dicho valor presente debe ser cero.

i) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

ii) Caracterice lo mejor posible el Equilibrio Competitivo.

iii) Halle los valores en estado estacionario para k^*, c^*, y^*, r^*, w^* , r^{d*}, r^{m*}.

Introduzcamos ahora un gobierno, que desea reducir el *spread* bancario (la diferencia entre las tasas de interés activa y pasiva). Para ello cuenta con dos alternativas: (a) una reforma del sistema financiero que reduzca la ineficiencia del mismo (incrementando θ), y (b) un impuesto τ al interés recibido por los bancos, cuya recaudación es devuelta a los consumidores como una transferencia *lump-sum* T_t (es decir, $T_t = \tau r_t^m m_t$).

iv) Analice los efectos de ambas alternativas sobre los valores de estado estacionario encontrados en (iii) y compare su eficacia en reducir el *spread*.

Pregunta 3

Considere el siguiente modelo de crecimiento, en donde el gasto del gobierno entra en la función de producción (en forma intensiva) de la siguiente manera:

$$f(k_t) = k_t^{\alpha} g_t^{\gamma}$$

con $\alpha + \gamma < 1$. Este gasto de gobierno (podemos pensarlo como construcción de carreteras) es financiado mediante un impuesto a los retornos del capital:

$$g_t = \tau r_t k_t$$

La función de utilidad tiene la forma usual:

$$u(c_t) = \log c_t$$

y por simplicidad asuma que no hay crecimiento de la población ni progreso técnico.

i) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

ii) Caracterice lo mejor posible el Equilibrio Competitivo.

iii) Encuentre el valor de estado estacionario k^* y grafíquelo como una función del impuesto τ.

iv) En base al resultado en (iii), muestre que existe un valor distinto de cero para τ que maximiza k^*. Encuentre este valor y grafíquelo como una función del parámetro γ. Interprete estos resultados.

Pregunta 4

Considere el siguiente modelo de crecimiento, que incluye la decisión trabajo-ocio e introduce de manera sencilla capital humano. Las familias deben dividir su dotación de tiempo entre trabajo (l_t), educación (e_t) y ocio ($1 - l_t - e_t$). El tiempo de ocio entra en la función de utilidad de la siguiente manera:

$$u(c_t, l_t, e_t) = \log c_t + \log(1 - l_t - e_t)$$

Las familias usan el tiempo de educación para acumular capital humano h_t de acuerdo a:

$$h_{t+1} = (1-\delta)h_t + e_t$$

y rentan este capital (más su trabajo no calificado l_t) a las firmas. La función de producción (en forma intensiva) es:

$$f(h_t, l_t) = h_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha}$$

y como no existe capital físico ni inversión, todo el producto va destinado al consumo. Por simplicidad, asuma nuevamente que no hay crecimiento de la población ni progreso técnico.

i) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

ii) Caracterice lo mejor posible el Equilibrio Competitivo

iii) Encuentre los valores de estado estacionario de h^*, l^*, c^* y e^*.

Suponga ahora que existe un gobierno, el cual quiere fomentar la educación en esta economía. Para ello, ofrece un subsidio a las familias proporcional al tiempo dedicado a educarse, subsidio que es financiado mediante un impuesto *lump sum* a las mismas familias.

iv) Redefina el Equilibrio Competitivo para esta economía.

v) Caracterice lo mejor posible el nuevo Equilibrio Competitivo.

vi) Encuentre los nuevos valores de estado estacionario para h^*, l^*, c^* y e^*. Compare sus resultados con los obtenidos en (iii) y evalúe la eficacia del subsidio educativo.

Pregunta 5

Considere la siguiente versión del modelo de crecimiento neoclásico con capital humano. La tecnología está dada por:

$$Y_t = F(K_t, H_t) = K_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha}$$

en donde K es el stock de capital físico y H el stock de capital humano. El producto puede ser usado para consumo, inversión en capital físico e inversión en capital humano:

$$Y_t = C_t + +I_t^K + I_t^H$$

Las familias maximizan una función de utilidad intertemporal:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log \frac{C_t}{L_t}$$

sujetos a la restricción presupuestaria:

$$C_t + I_t^K + I_t^H = r_t^K K_t + r_t^H H_t$$

y las leyes de acumulación para ambos tipos de capital:

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= (1-\delta)K_t + I_t^K \\ H_{t+1} &= (1-\delta)H_t + I_t^H \end{aligned}$$

Nótese que el trabajo no calificado (L_t) no entra ni en la función de producción ni en la restricción presupuestaria de las familias.

Por simplicidad, asuma que el tamaño de la población es constante ($n = 0$) y que no hay gobierno ni cambio tecnológico.

i) Defina un Equilibrio Competitivo para esta economía.

ii) Caracterice lo mejor posible el Equilibrio Competitivo.

iii) Muestre que no existe un estado estacionario en esta economía.

iv) Encuentre la tasa de crecimiento de todas las variables por trabajador en la senda de crecimiento balanceado.

B.2. Parte II

Pregunta 1

Considere la siguiente versión estocástica del modelo de cash-in-advance. El gobierno financia sus gastos mediante emisión de dinero. La oferta monetaria crece a una tasa μ_t, que sigue el proceso estocástico:

$$\mu_{t+1} = \bar{\mu} + \eta\mu_t + \epsilon_{t+1}$$

en donde ϵ_t es un ruido blanco con varianza σ_ϵ^2.

Por su parte, las familias maximizan una función de utilidad intertemporal que depende únicamente del consumo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log c_t$$

sujeto a su restricción presupuestaria y una restricción de cash-in-advance, según la cual los bienes de consumo deben ser adquridos con dinero traído del período anterior. La regla de acumulación del capital es la habitual, con tasa de depreciación δ.

Finalmente, las firmas operan con una tecnología descrita por la función de producción:

$$Y_t = e^{z_t} K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$

en donde z_t es un shock tecnológico que sigue el proceso estocástico:

$$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_{t+1}$$

y en donde ε_t es un ruido blanco con varianza σ_ε^2.

Por simplicidad, asuma que no hay crecimiento de la población ni cambio tecnológico exógeno.

i) Defina un Equilibrio Competitivo estocástico para esta economía.

ii) Caracterice lo mejor posible el estado estacionario para la versión determinística del modelo (es decir, con $\mu_t = \bar{\mu}$ y $z_t = 0$, $\forall t$).

iii) Suponga que dispone únicamente de la siguiente información de largo plazo:

$$\frac{wL}{Y} = 0.6 \qquad \frac{K}{Y} = 4 \qquad \frac{G}{Y} = 0.3 \qquad \frac{C}{Y} = 0.5$$

Usando las relaciones encontradas en (ii), calibre los parámetros β, δ, α y $\bar{\mu}$.

Pregunta 2

Considere el siguiente modelo de RBC con producción en el hogar. Las preferencias de las familias están descritas por una función de utilidad intertemporal que depende del consumo y el ocio:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\gamma \log c_t^m + (1-\gamma) \log c_t^h + \log\left(1 - l_t^m - l_t^h\right)\right]$$

en donde c_t^m es el consumo de bienes adquiridos a las firmas y c_t^h es el consumo de bienes producidos en el hogar. Asimismo, l_t^m representa la proporción del tiempo destinada al mercado laboral y l_t^h la proporción del tiempo destinada a producir en el hogar.

Con el ingreso proveniente de rentar trabajo y capital a las firmas, las familias compran bienes de consumo e inversión sujetas a la restricción presupuestaria:

$$c_t^m + i_t = w_t l_t^m + r_t k_t$$

Adicionalmente, las familias operan una tecnología que les permite producir bienes de consumo en el hogar, descrita por la función de producción:

$$c_t^h = \phi l_t^h$$

La regla de acumulación del capital es la habitual, con tasa de depreciación δ.

Finalmente, las firmas operan con una tecnología descrita por la función de producción:

$$y_t = e^{z_t} (k_t)^{\alpha} (l_t^m)^{1-\alpha}$$

en donde z_t es un shock tecnológico que sigue el proceso estocástico:

$$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_{t+1}$$

y en donde ε_t es un ruido blanco con varianza σ_{ε}^2.

Nótese que todas las variables están expresadas en unidades por trabajador. Por simplicidad, asuma que no hay crecimiento de la población ni cambio técnico exógeno.

i) Defina un Equilibrio Competitivo estocástico para esta economía.

ii) Caracterice lo mejor posible el estado estacionario para la versión determinística del modelo (con $z_t = 0$, $\forall t$).

iii) Suponga que dispone únicamente de la siguiente información de largo plazo:

$$\frac{wl^m}{y} = 0.6 \qquad \frac{k}{y} = 4 \qquad \frac{i}{y} = 0.3 \qquad l^m = 0.4 \qquad l^h = 0.3$$

Usando las relaciones encontradas en (ii), calibre los parámetros β, δ, α, γ y ϕ.

iv) Volviendo a la versión estocástica del modelo, suponga que ocurre un shock tecnológico positivo. ¿Qué ocurre con la proporción del tiempo destinada al mercado laboral, a la producción en el hogar y al ocio? ¿Es la variación en las horas destinadas al mercado laboral mayor o menor a la que se obtiene en el modelo simple de RBC, sin producción en el hogar?