

## CURSO DE MACROECONOMIA AVANZADA

### "HETEROGENEIDAD, INCERTIDUMBRE Y MERCADOS INCOMPLETOS"

© Carlos Urrutia, Instituto Tecnológico Autónomo de México, 2011

## CONTENIDO

- I. Modelos con Agentes Heterogéneos
- II. Modelos con Choques Idiosincráticos y Mercados Incompletos
- III. Modelos de Generaciones Solapadas y Ciclo de Vida

Cada sección incluye algunos Problemas Seleccionados.

## I. MODELOS CON AGENTES HETEROGENEOS

Podemos añadir *heterogeneidad* al modelo de crecimiento neoclásico de diversas maneras:

Consumidores distintos en:

- Capital inicial ( $k_0$ )
- Productividad del trabajo ( $\lambda_t \Leftarrow$  determinística o aleatoria)
- Preferencias ( $\beta$ )

© Carlos Urrutia, 2011

Empresas distintas en:

- Productividad ( $A_t \Leftarrow$  determinística o aleatoria)
- Factores específicos

Los modelos con agentes heterogéneos permiten contestar preguntas sobre la distribución del ingreso, organización industrial, etc.

También aportan nuevos elementos al análisis de los temas clásicos a nivel agregado, como el crecimiento o los ciclos económicos

Vamos a concentrarnos en modelos con consumidores heterogéneos

## Un Modelo Sencillo con Diferencias en Activos

Supondremos un continuo de agentes (consumidores/trabajadores) en  $[0, 1]$

- En cada período, los agentes difiere solo en sus tenencias de activos  $a_t^i = k_t^i + b_t^i$  (activo compuesto)
- Los activos individuales pueden ser positivos o negativos, pero se encuentran acotados por debajo  $(-B)$  para evitar esquemas de Ponzi
- En cada período, la distribución de activos  $a_t^i : [0, 1] \rightarrow (-B, \infty)$  determina el stock agregado de capital de la economía:

$$K_t = \int_0^1 a_t^i di$$

Por el lado de la producción, una empresa representativa combina capital y trabajo para producir el único bien, de acuerdo a

$$Y_t = F(K_t, L_t)$$

en donde  $F$  tiene rendimientos a escala constantes y las demás propiedades habituales

Cada individuo tiene una dotación de trabajo que normalizamos a uno, por lo tanto

$$L_t = \int_0^1 di = 1$$

y escribimos para simplificar

$$Y_t = f(K_t) \equiv F(K_t, 1)$$

Por último, nótese que por un argumento de arbitraje los dos componentes del activo compuesto  $a_t^i = k_t^i + b_t^i$  deben tener el mismo retorno

$$R_t \equiv \underbrace{r_t + (1 - \delta)}_{k_t^i} = \underbrace{1 + \iota_t}_{b_t^i}$$

en donde

-  $r_t$ : precio de alquiler del capital

-  $\iota_t$ : tasa de interés real de los bonos o activos financieros

Con esa notación, escribimos la restricción presupuestaria de cualquier agente  $i \in [0, 1]$  en el período  $t$  como

$$c_t^i + a_{t+1}^i = w_t + R_t a_t^i$$

### Definición de Equilibrio

Un Equilibrio Competitivo Secuencial para esta economía es un conjunto de secuencias para las cantidades individuales  $c_t^i, a_t^i, \forall i \in [0, 1]$ , las cantidades agregadas  $Y_t, K_t$  y los precios  $w_t, R_t$  tales que:

i) Para cada agente  $i \in [0, 1]$ , dados  $a_0^i > -B$ ,  $w_t$  y  $R_t$ , las secuencias  $c_t^i, a_{t+1}^i$  resuelven el problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^i) \\ \text{s.a.} \quad & c_t^i + a_{t+1}^i = w_t + R_t a_t^i \quad \forall t \\ & a_{t+1}^i > -B \quad \forall t \end{aligned}$$

ii) En cada período  $t$ , dados  $w_t$  y  $R_t$ , los valores  $Y_t$  y  $K_t$  resuelven el problema de la empresa:

$$\begin{aligned} \max \quad & Y_t - w_t - [R_t - (1 - \delta)] K_t \\ \text{s.a.} \quad & Y_t = f(K_t) \end{aligned}$$

y los beneficios son cero

$$Y_t = w_t + [R_t - (1 - \delta)] K_t$$

iii) En cada período  $t$ , los mercados se vacían:

$$\begin{aligned} Y_t &= \int_0^1 [c_t^i + a_{t+1}^i - (1 - \delta) a_t^i] di \\ K_t &= \int_0^1 a_t^i di \end{aligned}$$

### Condiciones de Primer Orden

Resolviendo el problema del agente  $i$ , obtenemos la ecuación de Euler

$$\frac{u'(c_t^i)}{\beta u'(c_{t+1}^i)} = R_{t+1}$$

y la restricción presupuestaria

$$c_t^i + a_{t+1}^i = w_t + R_t a_t^i$$

Usando la condición de *transversalidad*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_t a_{t+1}^i = 0$$

con  $\rho_t = \prod_{j=0}^t \frac{1}{R_j}$ , podemos escribir la restricción en valor presente

$$R_0 \sum_{t=0}^{\infty} \rho_t c_t^i = R_0 \left[ a_0^i + \sum_{t=0}^{\infty} \rho_t w_t \right] \equiv W_0^i$$

Del problema de la empresa, obtenemos los precios de equilibrio

$$R_t = f'(K_t) + (1 - \delta)$$

$$w_t = f(K_t) - f'(K_t) K_t$$

Combinando, tenemos el sistema

$$\frac{u'(c_t^i)}{\beta u'(c_{t+1}^i)} = f'(K_{t+1}) + (1 - \delta)$$

$$\int_0^1 c_t^i di = f(K_t) + (1 - \delta) K_t - K_{t+1}$$

que, junto a la condición de transversalidad, caracteriza las trayectorias de equilibrio para el consumo individual y el capital agregado

### Equilibrio Estacionario

En un equilibrio estacionario, las cantidades agregadas ( $K_t$ ,  $C_t$ ) y los precios ( $w_t$ ,  $R_t$ ) son constantes en el tiempo

¿Qué implica esto para las cantidades individuales ( $c_t^i$ ,  $a_t^i$ )?

- Basta con que

$$C_t = \int_0^1 c_t^i di \quad K_t = \int_0^1 a_t^i di$$

sean constantes, para lo cual la distribución de activos debe ser estacionaria

- En el modelo determinístico, las cantidades individuales también son constantes

A partir de las condiciones de primer orden, podemos facilmente ver que en un equilibrio estacionario

$$R^* = f'(K^*) + (1 - \delta) = \frac{1}{\beta}$$

La tasa de interés está dada por la inversa del factor de descuento

En un estado estacionario, las preferencias y la tecnología determinan el capital agregado, independientemente de la distribución de activos

### Homoteticidad y Agregación

Preferencias *homotéticas*: el ratio del consumo de dos bienes depende tan sólo del precio relativo entre ambos, no del nivel de ingreso

Ejemplos:

- Homotética:  $u(c) = \log(c) \Rightarrow \frac{c_{t+1}^i}{c_t^i} = \beta R_{t+1}$

- No-homotética:  $u(c) = \log(c - c_{\min}) \Rightarrow \frac{c_{t+1}^i - c_{\min}}{c_t^i - c_{\min}} = \beta R_{t+1}$ , luego

$$\frac{c_{t+1}^i}{c_t^i} = \beta R_{t+1} + (1 - \beta R_{t+1}) \frac{c_{\min}}{c_t^i}$$

En general, con preferencias homotéticas, la tasa marginal de sustitución entre consumo presente y consumo futuro depende tan solo de la tasa de crecimiento del consumo

$$\frac{u'(c_t^i)}{\beta u'(c_{t+1}^i)} = \Psi \left( \frac{c_{t+1}^i}{c_t^i} \right)$$

luego, por la ecuación de Euler,

$$\frac{c_{t+1}^i}{c_t^i} = \frac{c_{t+1}^j}{c_t^j} = \frac{C_{t+1}}{C_t}$$

Por lo tanto, se cumple también la ecuación de Euler a nivel agregado

$$\Psi \left( \frac{C_{t+1}}{C_t} \right) = \frac{u'(C_t)}{\beta u'(C_{t+1})} = R_{t+1}$$

Es decir, con preferencias homotéticas las cantidades agregadas satisfacen el sistema

$$\frac{u'(C_t)}{\beta u'(C_{t+1})} = f'(K_{t+1}) + (1 - \delta)$$

$$C_t = f(K_t) + (1 - \delta) K_t - K_{t+1}$$

y sus trayectorias de equilibrio son independientes de la distribución de activos

En otras palabras, con preferencias homotéticas podemos representar la dinámica agregada de la economía como si proviniera del problema de maximización de un único *agente representativo*

Aún en este caso, el modelo tiene predicciones acerca de la evolución de la distribución de la riqueza a lo largo del tiempo

## Evolución de la Distribución de la Riqueza

¿Cómo medimos la disparidad en la distribución de la riqueza?

- Usando la distribución de activos  $a_t^i$
- Usando la distribución de la riqueza permanente

$$W_t^i \equiv R_t^i \left[ a_t^i + \sum_{j=t}^{\infty} \left( \prod_{s=t}^j \frac{1}{R_s} \right) w_j \right]$$

medida como los activos de hoy más el valor presente del flujo de ingreso laboral futuro

En ambos casos, mediremos en cada período la dispersión en la distribución de la riqueza como el *coeficiente de variación* (la desviación estándar sobre la media) de la riqueza a lo largo de todos los agentes

La pregunta es, partiendo de un nivel inicial de capital  $K_0 < K^*$ , ¿qué ocurre con la disparidad en la distribución de la riqueza conforme la economía converge al estado estacionario?

Chatterjee (1994) muestra que la disparidad en la distribución de la riqueza permanente  $C.V. (W_t^i)$

... permanece constante con preferencias homotéticas

... *aumenta* a lo largo de la transición con preferencias no homotéticas del tipo  $u(c) = v(c - c_{\min})$ , con  $v$  homotética y  $c_{\min} > 0$

Intuición: con  $c_{\min} = 0$ , la tasa de crecimiento del consumo óptima es la misma para los agentes pobres y ricos; con  $c_{\min} > 0$ , la tasa de crecimiento del consumo óptima es menor para los agentes pobres, que por lo tanto ahorran menos

En el ejemplo con  $u(c) = \log(c - c_{\min})$

$$\frac{c_{t+1}^i}{c_t^i} = \beta R_{t+1} + (1 - \beta R_{t+1}) \frac{c_{\min}}{c_t^i}$$

Además, podemos mostrar que en este mismo ejemplo el consumo es una función afín de la riqueza permanente

$$c_t^i = (1 - \beta) W_t^i + c_{\min} D_t$$

por lo tanto la disparidad en el consumo sigue a la disparidad en la riqueza permanente

¿Qué sucede con la disparidad en la distribución de activos  $C.V. (a_t^i)$ ?

La intuición es más complicada; no solo importa la tasa de crecimiento del consumo, sino también el cambio en precios relativos  $(R_t, w_t)$  a lo largo de la transición, los cuales afectan la proporción de la riqueza permanente que los agentes mantienen en activos financieros o en trabajo

Obiols-Homs y Urrutia (2004) prueban para el caso  $u(c) = \log(c - c_{\min})$  y  $f(K) = AK^\alpha$  que la dispersión en la distribución de activos

... *disminuye* monotónicamente, si  $c_{\min} \leq 0$  o si  $c_{\min} > 0$  y  $K_0$  se encuentra suficientemente cerca de su nivel de estado estacionario  $K^*$

... en caso contrario, puede exhibir una dinámica no-monotónica que recuerda la *curva de Kuznets*

## Problema del Planificador Social y Eficiencia de Pareto

¿Cómo definimos el problema del planificador social con agentes heterogéneos?

Consideremos un planificador que asigna un peso  $\phi^i$  al agente  $i$ :

$$\phi : [0, 1] \rightarrow R \quad \int_0^1 \phi^i di = 1$$

Dado  $K_0$ , el planificador elige secuencias para el consumo individual  $c_t^i$  y el capital agregado  $K_t$  que resuelvan:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \int_0^1 \phi^i u(c_t^i) di \\ \text{s.a.} \quad & \int_0^1 c_t^i di + K_{t+1} - (1 - \delta) K_t = f(K_t) \quad \forall t \end{aligned}$$

Estas secuencias serán eficientes desde el punto de vista de Pareto

Usando las condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \phi^i u'(c_t^i) &= \phi^0 u'(c_t^0) \\ \frac{u'(c_t^i)}{\beta u'(c_{t+1}^i)} &= f'(K_{t+1}) + (1 - \delta) \\ \int_0^1 c_t^i di &= f(K_t) + (1 - \delta) K_t - K_{t+1} \end{aligned}$$

podemos probar los Teoremas del Bienestar para esta economía

TB1: Sean  $(\tilde{c}_t^i, \tilde{K}_t)$  las secuencias obtenidas como parte de un equilibrio competitivo. Existen pesos  $\tilde{\phi}$  para los cuales  $(\tilde{c}_t^i, \tilde{K}_t)$  resuelve el problema del planificador social

Para probar este resultado, simplemente construimos los pesos

$$\frac{\tilde{\phi}^i}{\tilde{\phi}^0} = \frac{u'(\tilde{c}_0^0)}{u'(\tilde{c}_0^i)}$$

y verificamos las condiciones de primer orden del problema del planificador social

TB2: Sean  $(\hat{c}_t^i, \hat{K}_t)$  las secuencias obtenidas resolviendo el problema del planificador social. Existen secuencias de precios  $(\hat{R}_t, \hat{w}_t)$  y de activos individuales  $\hat{a}_t^i$  que soportan un equilibrio competitivo

La demostración implica construir los precios:

$$\hat{R}_t = f'(\hat{K}_t) + (1 - \delta) \quad \hat{w}_t = f(\hat{K}_t) - f'(\hat{K}_t) \hat{K}_t$$

y, para cada individuo  $i$ , la secuencia de activos

$$\hat{a}_{t+1}^i = \hat{w}_t + \hat{R}_t^i \hat{a}_t^i - \hat{c}_t^i$$

con

$$\hat{a}_0^i = \sum_{t=0}^{\infty} \left( \prod_{j=0}^t \frac{1}{\hat{R}_j} \right) [\hat{c}_t^i - \hat{w}_t]$$

Finalmente, verificamos que se cumplen las condiciones de primer orden para un equilibrio competitivo

## Equilibrio Competitivo Recursivo

¿Cómo describimos el equilibrio de un modelo con agentes heterogéneos en el lenguaje recursivo de la programación dinámica?

Necesitamos definir primero las variables de estado

- Estado individual:  $a \in (-B, \infty)$
- Estado agregado: la distribución o medida  $\mu_t(a)$  de agentes con activos menores a  $a$

$$\mu_t : (-B, \infty) \rightarrow [0, 1] \quad \mu_t(a) = \#(a_t^i \leq a)$$

La distribución  $\mu_t(a)$  satisface

$$\lim_{a \rightarrow -B} \mu_t(a) = 0 \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \mu_t(a) = 1$$

Los agentes deben conocer la distribución  $\mu$  de hoy y su *ley de movimiento*

$$\mu' = \Gamma(\mu)$$

para predecir los precios de hoy y mañana

La ley de movimiento  $\Gamma$  es un objeto complicado, resultado de las decisiones de todos los agentes en equilibrio

Un Equilibrio Competitivo Recursivo es un conjunto de funciones  $v(a, \mu)$ ,  $c(a, \mu)$ ,  $a'(a, \mu)$ , precios  $w(\mu)$  y  $R(\mu)$ , demanda de capital  $K(\mu)$  y ley de movimiento  $\Gamma(\mu)$  tales que:

i) Para cada par  $(a, \mu)$ , dadas las funciones  $w$ ,  $R$  y  $\Gamma$ , la función de valor  $v(a, \mu)$  resuelve la ecuación de Bellman:

$$v(a, \mu) = \max_{c, a'} \{u(c) + \beta v(a', \mu')\}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } c + a' &= w(\mu) + R(\mu)a \\ a' &> -B \\ \mu' &= \Gamma(\mu) \end{aligned}$$

y  $c(a, \mu)$ ,  $a'(a, \mu)$  son reglas de decisión óptimas para este problema

ii) Para cada  $\mu$ , los precios satisfacen las condiciones marginales de la empresa representativa:

$$R(\mu) = f'(K(\mu)) + (1 - \delta)$$

$$w(\mu) = f(K(\mu)) - f'(K(\mu))K(\mu)$$

iii) Para cada  $\mu$ , los mercados se vacían:

$$f(K(\mu)) = \int_{-B}^{\infty} [c(a, \mu) + a'(a, \mu) - (1 - \delta)a] d\mu(a)$$

$$K(\mu) = \int_{-B}^{\infty} a d\mu(a)$$

iv) Para cada  $\mu$ , la ley de movimiento  $\Gamma$  es consistente con las decisiones óptimas de los agentes (*expectativas racionales*)

Una vez resuelto el equilibrio recursivo, partiendo de  $\mu_0$  podemos generar una secuencia de distribuciones  $\mu_t$  iterativamente:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \Gamma(\mu_0) \\ \mu_2 &= \Gamma(\mu_1) = \Gamma(\Gamma(\mu_0)) \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Un equilibrio recursivo estacionario es una *distribución invariante*  $\mu^*$  tal que  $\mu^* = \Gamma(\mu^*)$

También podemos encontrar la secuencia para el capital agregado

$$\begin{aligned}K_0 &= K(\mu_0) \\ K_1 &= K(\mu_1) \\ &\dots\dots\end{aligned}$$

y los precios de equilibrio

Finalmente, podemos seguir a cualquier agente  $i \in [0, 1]$ , con  $a_0^i$  dado, a lo largo del tiempo:

$$\begin{aligned}a_1^i &= a'(a_0^i, \mu_0) \\ a_2^i &= a'(a_1^i, \mu_1) = a'(a'(a_0^i, \mu_0), \Gamma(\mu_0)) \\ &\dots\dots\dots \\ c_1^i &= c(a_0^i, \mu_0) \\ c_2^i &= c(a_1^i, \mu_1) \\ &\dots\dots\end{aligned}$$

Las secuencias resultantes son equivalentes a las que obtendríamos resolviendo el equilibrio competitivo secuencial

## PROBLEMAS SELECCIONADOS

### 1. Resolviendo numéricamente una versión del modelo de crecimiento neoclásico

Considere el modelo de crecimiento neoclásico con las siguientes formas funcionales:

$$u(C_t) = \log(C_t) \quad f(K_t) = AK_t^\alpha$$

en donde  $A > 0$  y  $\alpha < 1$  son parámetros dados. Suponga también que la depreciación es completa ( $\delta = 1$ ), y que no hay progreso técnico ni crecimiento de la población.

- i) Defina un equilibrio competitivo secuencial para esta economía
- ii) Caracterice lo mejor posible el equilibrio (halle las ecuaciones de Euler, factibilidad, etc.)
- iii) Halle los valores en estado estacionario para  $K^*$ ,  $C^*$ ,  $R^*$  y  $w^*$

- iv) Pruebe que la transición al estado estacionario obedece la regla de política

$$K_{t+1} = \alpha\beta AK_t^\alpha$$

- v) Dados los siguientes valores para los parámetros

$$\alpha = 0.3 \quad \beta = 0.953 \quad A = 1$$

Utilizando la regla de política propuesta en (iv), y partiendo de  $K_0 = K^*/2$ , grafique la trayectoria de equilibrio (transición al estado estacionario) para  $K_t$  por 100 períodos

- vi) En base al resultado obtenido en (v), grafique las trayectorias para  $C_t$ ,  $R_t$  y  $w_t$  por los mismos 100 períodos

- vii) Partiendo del estado estacionario del modelo con los valores de los parámetros en (v), analice numéricamente el efecto de corto y largo plazo en las variables de un aumento en la productividad, de  $A = 1$  a  $A = 2$

## 2. Resolviendo numéricamente un modelo simple con agentes heterogéneos

Considere ahora una versión del modelo del ejercicio 1 con agentes heterogéneos:

$$u(c_t^i) = \log(c_t^i) \quad f(K_t) = AK_t^\alpha$$

con los mismos parámetros

$$\alpha = 0.3 \quad \beta = 0.953 \quad A = 1$$

y que empieza también con un capital inicial por debajo de su nivel de estado estacionario  $K_0 = K^*/2$ . Los agentes solo difieren en sus activos iniciales. La distribución inicial de los activos es la siguiente

$$a_0^i = iK^* \quad , \forall i \in [0, 1]$$

es decir, los agentes están ordenados en el intervalo  $[0, 1]$  de menor a mayor nivel de riqueza. Nótese que:

$$K_0 = \int_0^1 a_0^i di = \int_0^1 iK^* di = \frac{K^*}{2}$$

- i) Defina un equilibrio competitivo secuencial para esta economía
- ii) Caracterice lo mejor posible el equilibrio (halle las ecuaciones de Euler, etc.)
- iii) Demuestre que en equilibrio se cumple que

$$c_t^i = (1 - \beta) W_t^i \quad , \forall i \in [0, 1]$$

en donde

$$W_t^i \equiv R_t^i \left[ a_t^i + \sum_{j=t}^{\infty} \left( \prod_{s=t}^j \frac{1}{R_s} \right) w_j \right]$$

- iv) Usando la propiedad de homoteticidad de la función de utilidad logarítmica, concluya que las secuencias de equilibrio obtenidas en los incisos (v) y (vi) del ejercicio 1 también corresponden a las secuencias agregadas y de precios para este modelo

v) Considere ahora los siguientes 5 individuos tomados del intervalo entre cero y uno:  $\{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ . Para cada uno de estos agentes construya ahora las secuencias óptimas para el consumo y los activos individuales por 100 períodos, usando iterativamente

$$W_t^i = R_t^i \left[ a_t^i + \sum_{j=t}^{\infty} \left( \prod_{s=t}^j \frac{1}{R_s} \right) w_j \right]$$

$$c_t^i = (1 - \beta) W_t^i$$

$$a_{t+1}^i = w_t + R_t a_t^i - c_t^i$$

vi) En base a los resultados del inciso anterior, describa gráficamente que sucede con la disparidad en la distribución de la riqueza permanente y la de los activos a lo largo de la transición al estado estacionario.

### 3. Un modelo con agentes heterogéneos y fluctuaciones en el ingreso

Considere una economía con individuos en  $i \in [0, 1]$ . La productividad del trabajo de cada agente  $\lambda_t^i$  fluctúa exógenamente en el tiempo de acuerdo a:

$$\lambda_t^i = \begin{cases} \lambda_1 & \forall i \leq 0.5 \\ \lambda_2 & \forall i > 0.5 \end{cases} \quad \forall t = 0, 2, 4, 6, \dots$$

$$\lambda_t^i = \begin{cases} \lambda_1 & \forall i \leq 0.5 \\ \lambda_2 & \forall i > 0.5 \end{cases} \quad \forall t = 1, 3, 5, 7, \dots$$

con  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$  y  $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$ . Nótese que este NO es un proceso aleatorio, todo es determinístico en el modelo. Cada agente resuelve el problema:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c_t^i)$$

$$s.a. \quad c_t^i + a_{t+1}^i = w_t \lambda_t^i + R_t a_t^i$$

dados los activos iniciales  $a_0^i$  y las secuencias de precios  $w_t$  y  $R_t$ . La función de producción es lineal en el trabajo:

$$Y_t = AL_t = A \int_0^1 \lambda_t^i di$$

Por simplicidad, no hay capital en esta economía, luego en equilibrio

$$\int_0^1 a_t^i di = 0$$

Nótese finalmente que, de acuerdo a los supuestos anteriores,

$$L_t = \int_0^1 \lambda_t^i di = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = 1$$

- i) Defina un equilibrio competitivo secuencial para esta economía
- ii) Caracterice lo mejor posible el equilibrio (halle las ecuaciones de Euler, etc.)

iii) Demuestre que, partiendo de una distribución inicial de activos arbitraria  $a_0^{i*}$  que satisfice  $\int_0^1 a_0^{i*} di = 0$ , la economía converge instantáneamente a un equilibrio estacionario con  $R^* = \frac{1}{\beta}$

iv) Dada una distribución inicial de activos  $a_0^{i*}$ , construya analíticamente las secuencias individuales de consumo,  $c_t^{i*}$  y activos  $a_t^{i*}$ . Verifique que dichas secuencias son consistentes con un equilibrio estacionario, es decir, que satisfacen las condiciones de primer orden en (ii) dados los precios estacionarios  $w^* = A$  y  $R^* = \frac{1}{\beta}$

v) Usando los resultados del inciso anterior, muestre que los agentes suavizan perfectamente su consumo a lo largo del tiempo ahorrando más cuando tienen una productividad alta y menos cuando su productividad es baja. Muestre también que, dados los mismos activos iniciales, un agente que empieza con una productividad alta ( $i > 0.5$ ) consume permanentemente más que un agente que empieza con una productividad baja ( $i \leq 0.5$ )

## II. MODELOS CON CHOQUES IDIOSINCRATICOS Y MERCADOS INCOMPLETOS

Estos modelos fueron desarrollados en los artículos seminales de:

- Bewley (*Journal of Economic Theory*, 1977)
- Aiyagari (*Quarterly Journal of Economics*, 1994, y *Journal of Political Economy*, 1995)
- Huggett (*Journal of Economic Dynamics and Control*, 1993, y *Journal of Monetary Economics*, 1996)

y han ganado un lugar importante en la literatura sobre el ahorro y la distribución del ingreso

© Carlos Urrutia, 2011

### El Modelo Básico

Supondremos un continuo de agentes en  $[0, 1]$

- En cada período, los agentes difieren en sus activos  $a_t^i$  y en la realización de un choque aleatorio idiosincrático de productividad  $\lambda_t^i$
- Todos obtienen  $\lambda_t^i$  de la misma distribución Markoviana, con media normalizada a uno y límites inferiores y superiores  $\lambda_{\min}, \lambda_{\max} > 0$
- Los agentes son iguales *ex-ante* (tienen los mismo activos iniciales  $a_0^i$  y realización  $\lambda_0^i$ ), pero irán divergiendo a lo largo del tiempo de acuerdo a su propia historia de choques

$$\lambda^{i,t} \equiv (\lambda_0^i, \lambda_1^i, \dots, \lambda_t^i)$$

- Por lo tanto, todos los agentes resuelven el mismo problema en el período 0
- Usando la ley de grandes números, hay incertidumbre a nivel individual pero no agregado

$$L_t \equiv \int_0^1 \lambda_t^i di = 1$$

- Asumiremos también que los mercados son incompletos: los agentes solo pueden asegurarse contra las malas realizaciones de productividad acumulando un tipo de activo seguro

Además, impondremos una restricción crediticia como un monto máximo de ese activo que puede pedir prestado

Cada agente resuelve el problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ \text{s.t.} \quad & c_t + a_{t+1} = w_t \lambda_t + R_t a_t \\ & a_{t+1} \geq -\phi \\ & a_0, \lambda_0 \text{ dado} \end{aligned}$$

en donde  $\lambda_t$  es la realización del choque de productividad laboral y  $\phi$  es un límite de crédito (hablaré más adelante sobre el mismo) más estricto que el necesario para evitar esquemas de Ponzi

## Definición de Equilibrio

Un Equilibrio Competitivo Secuencial para esta economía es un conjunto de planes contingentes para las cantidades individuales  $c_t(\lambda^t)$ ,  $a_{t+1}(\lambda^t)$  y secuencias para las cantidades agregadas  $Y_t$ ,  $K_t$  y precios  $w_t$ ,  $R_t$  tales que:

i) Dados  $a_0 \geq -\phi$ ,  $\lambda_0 > 0$ ,  $w_t$ ,  $R_t$  y el proceso estocástico para  $\lambda$ , los planes  $c_t(\lambda^t)$ ,  $a_{t+1}(\lambda^t)$  resuelven el problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t \in \Lambda^t} \beta^t \pi(\lambda^t) u(c_t(\lambda^t)) \\ \text{s.a.} \quad & c_t(\lambda^t) + a_{t+1}(\lambda^t) = w_t \lambda_t + R_t a_t(\lambda^{t-1}) \\ & a_{t+1}(\lambda^t) \geq -\phi \quad \forall \lambda^t, \forall t \end{aligned}$$

ii) En cada período  $t$ , dados  $w_t$  y  $R_t$ , los valores  $Y_t$  y  $K_t$  resuelven el problema de la empresa:

$$\begin{aligned} \max \quad & Y_t - w_t - [R_t - (1 - \delta)] K_t \\ \text{s.t.} \quad & Y_t = f(K_t) \end{aligned}$$

y los beneficios son cero

iii) En cada período  $t$ , los mercados se vacían:

$$\begin{aligned} Y_t &= \sum_{\lambda^t} \pi(\lambda^t) [c_t(\lambda^t) + a_{t+1}(\lambda^t) - (1 - \delta) a_t(\lambda^{t-1})] \\ K_t &= \sum_{\lambda^t} \pi(\lambda^t) a_t(\lambda^{t-1}) \end{aligned}$$

Nótese que:

- Los planes contingentes son los mismos para cada agente
- El consumo y los activos de cada individuo dependen de su propia historia  $\lambda^{i,t}$
- Usando nuevamente la ley de grande números, la probabilidad  $\pi(\lambda^t)$  representa la fracción de agentes con historia  $\lambda^t$

### Mercados Completos y de Arrow-Debreu

Antes de caracterizar el equilibrio competitivo secuencial con mercados incompletos, podemos definir la *asignación eficiente* como las secuencias agregadas de consumo y capital que resuelven el problema del planificador social

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t) \\ \text{s.a.} \quad & C_t + K_{t+1} - (1 - \delta) K_t = f(K_t) \quad \forall t \\ & K_0 \text{ dado} \end{aligned}$$

Puesto que los individuos son ex-ante iguales, el planificador distribuye el consumo de manera igualitaria ( $c_t = C_t$ )

Esta solución asegura de manera perfecta a los agentes

Con mercados incompletos y restricciones de crédito la solución eficiente no puede ser alcanzada

Sin embargo, podemos descentralizar la solución eficiente con *mercados completos*

De manera secuencial, solo cambiaría la restricción presupuestaria de los hogares

$$c_t(\lambda^t) + \sum_{\lambda^{t+1}|\lambda^t} a_{t+1}(\lambda^{t+1}|\lambda^t) = w_t \lambda_t + R_t a_t(\lambda^t|\lambda^{t-1})$$

en donde  $a_{t+1}(\lambda^{t+1}|\lambda^t)$  es un *activo contingente* que paga  $R_t$  en  $\lambda^{t+1}$  y cero en otros casos

Otra manera de descentralizar la solución eficiente es mediante mercados de *Arrow-Debreu*

La restricción presupuestaria sería entonces

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t \in \Lambda^t} p_t(\lambda^t) c_t(\lambda^t) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\lambda^t \in \Lambda^t} p_t(\lambda^t) w_t \lambda_t$$

en donde  $p_t(\lambda^t)$  es el precio de una unidad del único bien entregada en el período t si se cumple la historia de choques individuales  $\lambda^t$

En esta estructura, hay un único mercado que se abre en el período cero y donde se intercambian estas mercancías contingentes

## Formulación Recursiva

Volviendo al equilibrio competitivo secuencial con mercados incompletos, vamos a continuar el análisis usando el language recursivo

- Las variables de estado individuales son  $a$  y  $\lambda$
- En cada período,  $\mu(a^*, \lambda^*)$  representa la fracción de agentes con activos  $a \leq a^*$  y productividad  $\lambda \leq \lambda^*$

$$\mu : S \equiv [-\phi, \infty) \times [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \rightarrow [0, 1]$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \mu_t(a, \lambda_{\max}) = 1$$

- La distribución o medida  $\mu$  es la variable de estado agregada

$$\int_S a d\mu(a, \lambda) = K \quad \int_S \lambda d\mu(a, \lambda) = L = 1$$

Un Equilibrio Competitivo Recursivo es un conjunto de funciones  $v(a, \lambda, \mu)$ ,  $c(a, \lambda, \mu)$ ,  $a'(a, \lambda, \mu)$ , precios  $w(\mu)$  y  $R(\mu)$ , demanda de capital  $K(\mu)$  y ley de movimiento  $\Gamma(\mu)$  tales que:

i) Para cada triple  $(a, \lambda, \mu)$ , dadas las funciones  $w$ ,  $r$  y  $\Gamma$ , la función de valor  $v(a, \lambda, \mu)$  resuelve la ecuación de Bellman:

$$v(a, \lambda, \mu) = \max_{c, a'} \left\{ u(c) + \beta E_{\lambda} v(a', \lambda', \mu') \right\}$$

$$s.t. \quad c + a' = w(\mu) \lambda + R(\mu) a$$

$$a' \geq -\phi$$

$$\lambda' \sim \Pi(\lambda)$$

$$\mu' = \Gamma(\mu)$$

y  $c(a, \lambda, \mu)$ ,  $a'(a, \lambda, \mu)$  son reglas de decisión óptimas para este problema

ii) Para cada distribución  $\mu$ , los precios satisfacen las condiciones:

$$R(\mu) = f'(K(\mu)) + (1 - \delta)$$

$$w(\mu) = f(K(\mu)) - f'(K(\mu))K(\mu)$$

iii) Para cada distribución  $\mu$ , los mercados se vacían:

$$f(K(\mu)) = \int_S [c(a, \lambda, \mu) + a'(a, \lambda, \mu) - (1 - \delta)a] d\mu(a, \lambda)$$

$$K(\mu) = \int_S a d\mu(a, \lambda)$$

$$1 = \int_S \lambda d\mu(a, \lambda)$$

iv) Para cada distribución  $\mu$ , la ley de movimiento  $\Gamma$  es consistente con el comportamiento individual de los agentes

### Equilibrio Estacionario

Un equilibrio estacionario es un equilibrio en el cual las cantidades agregadas  $C_t$ ,  $K_t$  y los precios  $w_t$ ,  $R_t$  son constantes

En el lenguaje recursivo, un equilibrio estacionario es una distribución invariante  $\mu^*$  tal que  $\mu^* = \Gamma(\mu^*)$

Solo vamos a estudiar el equilibrio estacionario del modelo, que implica resolver y caracterizar la ecuación de Bellman:

$$v(a, \lambda) = \max_{c, a'} \{u(c) + \beta E_\lambda v(a', \lambda')\}$$

$$s.t. \quad c + a' = w^* \lambda + R^* a$$

$$a' \geq -\phi$$

$$\lambda' \sim \Pi(\lambda)$$

Analizar la transición al equilibrio estacionario es mucho más difícil

Paréntesis: Sobre el Límite de Crédito

De la restricción de crédito, sabemos que en un equilibrio estacionario  $c_t \geq 0$  solo si

$$a_t \geq \frac{1}{R^*} (a_{t+1} - w^* \lambda_t)$$

Iterando hacia adelante y usando la condición de transversalidad,  $c_{t+j} \geq 0$ ,  $\forall j > 0$ , solo si

$$a_t \geq -\frac{1}{R^*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{R^*}\right)^j w^* \lambda_{t+j}$$

es decir, si el valor de la deuda de hoy no es mayor al valor presente del flujo de ingreso laboral futuro

Para asegurar que los agentes no tengan un consumo negativo en el futuro incluso en el peor de los casos posible, debemos imponer el *limite natural* de crédito:

$$a_t \geq -\frac{1}{R^*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{R^*}\right)^j w^* \lambda_{\min} = -\frac{w^* \lambda_{\min}}{R^* - 1}$$

Cualquier límite de crédito menor al límite natural es 'ad-hoc', en el sentido de que no proviene de la condición de no-negatividad del consumo

Los resultados que veremos a continuación corresponden a un límite arbitrario

$$\phi < \frac{w^* \lambda_{\min}}{R^* - 1}$$

Fin del paréntesis

## La Tasa de Interés con Mercado Incompletos

Volviendo a la ecuación de Bellman

$$v(a, \lambda) = \max_{c, a'} \{u(c) + \beta E_{\lambda} v(a', \lambda')\}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } c + a' &= w^* \lambda + R^* a \\ a' &\geq -\phi \end{aligned}$$

la condición de primer orden con respecto a  $a'$  requiere:

$$-u'(c) + \beta E_{\lambda} v_a(a', \lambda') \leq 0 \quad (= \text{if } a' > -\phi)$$

Usando la condición de envolvente de Benveniste-Scheinkman,

$$v_a(a, \lambda) = R^* u'(c)$$

obtenemos la ecuación de Euler:

$$u'(c) \geq \beta R^* E_{\lambda} u'(c') \quad (= \text{si } a' > -\phi)$$

Resultado: *En cualquier equilibrio estacionario para esta economía,  $R^* < \frac{1}{\beta}$*

Vamos a probar este resultado para choques i.i.d. ( $\lambda'$  independiente de  $\lambda$ )

Los pasos son los siguientes:

1. Definir los recursos totales como  $z = w^* \lambda + R^* a + \phi$  y reescribir el problema como:

$$v(z) = \max_{c, a'} \{u(c) + \beta E v(z')\}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } c + a' &= z - \phi \\ a' &\geq -\phi \\ z' &= w^* \lambda' + R^* a' + \phi \end{aligned}$$

Como los ingresos provenientes del capital y del trabajo son sustitutos perfectos, los agentes sólo se preocupan por la suma

2. Mostrar que  $v(z)$  es estrictamente cóncava (usar propiedades del operador  $T$  de Bellman)

3. Aplicando nuevamente Benveniste-Scheinkman, tenemos que:

$$v'(z) = R^* u'(c(z))$$

y puesto que  $u$  y  $v$  son estrictamente cóncavas ( $u'$ ,  $v'$  estrictamente decrecientes),  $c$  es estrictamente creciente en  $z$

4. Los activos tendrán un límite superior si existe  $\bar{z}$  tal que:

$$\bar{z} = w^* \lambda_{\max} + R^* a'(\bar{z}) + \phi$$

es decir, aún con la mejor realización del choque de productividad los agentes no aumentan sus recursos totales

5. Escribir la ecuación de Euler (usando Benveniste-Scheinkman 'al revés') como:

$$v'(z) \geq \beta R^* E v'(z')$$

luego:

$$v'(\bar{z}) \geq \beta R^* E v'(w^* \lambda' + R^* a'(\bar{z}) + \phi)$$

6. Puesto que  $v'$  es estrictamente decreciente (ver paso 4):

$$\begin{aligned} & E v'(w^* \lambda' + R^* a'(\bar{z}) + \phi) \\ &= \sum_{\lambda} \pi(\lambda) v'(w^* \lambda + R^* a'(\bar{z}) + \phi) \\ &> v'(w^* \lambda_{\max} + R^* a'(\bar{z}) + \phi) = v'(\bar{z}) \end{aligned}$$

7. Combinando los resultados obtenidos en los pasos 6 y 7:

$$v'(\bar{z}) > \beta R^* v'(\bar{z})$$

luego  $R^* \geq \frac{1}{\beta}$  implica una contradicción ( $v'(\bar{z}) > v'(\bar{z})$ )

8. Concluir que  $R^* \geq \frac{1}{\beta}$  implica que no existe el límite superior  $\bar{z}$ , por lo que los activos individuales crecen sin límite

Luego, en cualquier equilibrio estacionario debemos tener  $R^* < \frac{1}{\beta}$  ■

### Ahorro Precaucional

Volviendo al problema del planificador social que representa la solución con mercados completos

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t)$$

$$\text{s.a.} \quad C_t + K_{t+1} - (1 - \delta) K_t = f(K_t) \quad \forall t$$

$K_0$  dado

podemos hallar las condiciones de primer orden

$$\frac{u'(C_t)}{\beta u'(C_{t+1})} = f'(K_{t+1}) + (1 - \delta)$$
$$C_t = f(K_t) + (1 - \delta) K_t - K_{t+1}$$

Luego, en una solución estacionaria

$$R^* = f'(K^*) + (1 - \delta) = \frac{1}{\beta}$$

$$C^* = f(K^*) - \delta K^*$$

la tasa de interés es igual a la inversa del factor de descuento

Por lo tanto, comparando la solución eficiente del problema del planificador social con el equilibrio competitivo con mercados incompletos y restricciones de crédito

$$R_{eq}^* < R_{plan}^* = \frac{1}{\beta}$$

de donde

$$K_{eq}^* > K_{plan}^*$$

En el modelo con choques idiosincráticos, mercados incompletos y restricciones de crédito los agentes ahorran más que el monto eficiente

La razón es que necesitan reservas que les permitan amortiguar el impacto de malas realizaciones de los choques de productividad

Cuando ocurre un choque negativo, los agentes pueden verse limitados en su capacidad de pedir prestado; para evitar reducir el consumo, deben usar sus propios ahorros

⇒ Los agentes ahorran entonces por *motivos precaucionales*

Podemos medir el tamaño de ahorro precaucional como  $K_{eq}^*/K_{plan}^*$

## Otras Implicaciones del Modelo

- Diferencias relativamente pequeñas en el ingreso pueden generar diferencias grandes en la distribución de la riqueza (Huggett, *JME* 96)
- Un impuesto al capital puede ser eficiente, pues reduce los incentivos a la sobre-acumulación de riqueza (Aiyagari, *JPE* 95)
- La tasa de interés libre de riesgo puede ser tan baja como en los datos aún con valores razonables para la aversión al riesgo (Huggett, *JEDC* 93)

## PROBLEMAS SELECCIONADOS

### 1. *Un modelo con agentes heterogéneos, fluctuaciones en el ingreso y restricciones de crédito*

Considere una economía con individuos en  $i \in [0, 1]$  similar a la del ejercicio 3 del tema anterior. La productividad del trabajo de cada agente  $\lambda_t^i$  fluctúa exógenamente y de manera determinística en el tiempo de acuerdo a:

$$\lambda_t^i = \begin{cases} \lambda_1 & \forall i \leq 0.5 \\ \lambda_2 & \forall i > 0.5 \end{cases} \quad \forall t = 0, 2, 4, 6, \dots$$
$$\lambda_t^i = \begin{cases} \lambda_1 & \forall i \leq 0.5 \\ \lambda_2 & \forall i > 0.5 \end{cases} \quad \forall t = 1, 3, 5, 7, \dots$$

con  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$  y  $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$ . La función de producción es lineal en el trabajo:

$$Y_t = AL_t = A \int_0^1 \lambda_t^i di = A$$

Cada agente resuelve el problema:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c_t^i)$$

$$s.a. \quad c_t^i + a_{t+1}^i = w_t \lambda_t^i + R_t a_t^i$$
$$a_{t+1}^i \geq -\phi$$

en donde  $\phi$  es un límite de crédito exógeno y más estricto que el límite natural.

- i) Defina un equilibrio competitivo secuencial para esta economía
- ii) Caracterice lo mejor posible el equilibrio (halle las ecuaciones de Euler, etc.)
- iii) Demuestre que en todo equilibrio estacionario se cumple que  $R^* \leq \frac{1}{\beta}$
- iv) [Más difícil] Defina ahora  $B_t$  como el conjunto de agentes para los cuales la restricción de crédito es activa (es decir, para los cuales  $a_{t+1}^i = -\phi$  en equilibrio). Muestre que en todo equilibrio estacionario en el cual  $B_t \neq \emptyset$  se cumple que  $R^* < \frac{1}{\beta}$

### III. MODELOS DE GENERACIONES SOLAPADAS Y CICLO DE VIDA

Una dimensión importante en la cual difieren los agentes es la edad

- En cada momento del tiempo, coexisten individuos jóvenes y viejos
- Estos agentes tienen diferentes niveles de ingreso e incentivos a ahorrar
- *Teoría del ciclo de vida*: dado un perfil de ingreso a lo largo de la vida, los agentes mantienen un consumo parejo ahorrando y desahorrando a distintas edades

© Carlos Urrutia, 2011

#### El Modelo Básico

Supondremos que los agentes viven por dos períodos: jóvenes y viejos (retirados)

Perfil exógeno de productividad del trabajo para cada agente  $i$ ,

$$\lambda_t^{i,1} = 1 \quad \lambda_{t+1}^{i,2} = 0$$

No hay incertidumbre en el modelo

Supondremos que en cada período nace un continuo de jóvenes en  $[0, 1]$  idénticos

No hay crecimiento de la población

Todos los agentes son *ex-ante* iguales y empiezan con cero activos cuando jóvenes

Problema de un agente joven

$$\begin{aligned} & \max_{\{c_t^1, c_{t+1}^2, a_{t+1}^2\}} u(c_t^1) + \beta u(c_{t+1}^2) \\ \text{s.t.} \quad & c_t^1 + a_{t+1}^2 = w_t \\ & c_{t+1}^2 = R_{t+1} a_{t+1}^2 \end{aligned}$$

No hay restricciones de crédito; tampoco son posibles esquemas de Ponzi con horizonte finito

En este modelo, los jóvenes ahorran para financiar su retiro

Imponemos la condición de transversalidad  $a_{t+2}^3 = 0$

La empresa representativa combina capital y trabajo para producir el único bien, de acuerdo a

$$Y_t = F(K_t, L_t) = F(K_t, 1) = f(K_t)$$

en donde  $F$  tiene rendimientos a escala constantes y las demás propiedades habituales

El stock de capital es igual a los activos de los retirados

$$K_t = \int_0^1 a_t^2 di = a_t^2$$

o bien

$$K_{t+1} = \int_0^1 a_{t+1}^2 di = a_{t+1}^2$$

El capital de mañana será igual al ahorro de los jóvenes

### Definición de Equilibrio

Un Equilibrio Competitivo Secuencial para esta economía es un conjunto de secuencias para las cantidades individuales  $c_t^1$ ,  $c_t^2$ ,  $a_t^2$ , las cantidades agregadas  $Y_t$ ,  $K_t$  y los precios  $w_t$ ,  $R_t$  tales que:

i) En cada período  $t$ , dados  $w_t$  y  $R_t$ , los valores  $c_t^1$ ,  $c_{t+1}^2$ ,  $a_{t+1}^2$  resuelven el problema del agente joven:

$$\begin{aligned} \max \quad & u(c_t^1) + \beta u(c_{t+1}^2) \\ \text{s.a.} \quad & c_t^1 + a_{t+1}^2 = w_t \\ & c_{t+1}^2 = R_{t+1} a_{t+1}^2 \end{aligned}$$

ii) En el período inicial, dados  $a_0^2$  y  $R_0$ , el valor satisface  $c_0^2$  satisface la condición para el agente retirado

$$c_0^2 = R_0 a_0^3$$

iii) En cada período  $t$ , dados  $w_t$  y  $R_t$ , los valores  $Y_t$  y  $K_t$  resuelven el problema de la empresa:

$$\begin{aligned} \max \quad & Y_t - w_t - [R_t - (1 - \delta)] K_t \\ \text{s.a.} \quad & Y_t = f(K_t) \end{aligned}$$

y los beneficios son cero

iv) En cada período  $t$ , los mercados se vacían:

$$\begin{aligned} Y_t &= c_t^1 + c_t^2 + K_{t+1} - (1 - \delta) K_t \\ K_t &= a_t^2 \end{aligned}$$

## Condiciones de Primer Orden

Resolviendo el problema del agente joven, obtenemos la ecuación de Euler

$$u'(c_t^1) = \beta R_{t+1} u'(c_{t+1}^2)$$

También podemos combinar las restricciones presupuestarias como una única restricción intertemporal en valor presente:

$$c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{R_{t+1}} = w_t$$

Estas dos ecuaciones definen implícitamente las funciones de consumo para cada tipo de agente:

$$c_t^1 = c_t^1(w_t, R_{t+1}) \quad c_t^2 = c_t^2(w_{t-1}, R_t)$$

de donde podemos obtener también la función de ahorro

$$a_{t+1}^2 = w_t - c_t^1(w_t, R_{t+1}) = a_{t+1}^2(w_t, R_{t+1})$$

Del problema de la empresa, obtenemos los precios de equilibrio

$$R_t = f'(K_t) + (1 - \delta)$$

$$w_t = f(K_t) - f'(K_t) K_t$$

que reemplazando en la función de ahorro, define implícitamente

$$a_{t+1}^2 = a_{t+1}^2(w_t(K_t), R_{t+1}(K_{t+1})) \equiv S(K_t, K_{t+1})$$

En equilibrio, tiene que cumplirse

$$S(K_t, K_{t+1}) = K_{t+1}$$

una ecuación en diferencia de primer orden en  $K_t$

Esta ecuación caracteriza la dinámica del capital agregado en la transición; dependiendo de las funciones de utilidad y producción, puede ser muy complicada

## Equilibrio Estacionario y Eficiencia

Nuevamente nos centraremos en un equilibrio estacionario, en el cual las cantidades agregadas y los precios son constantes

Esto implica también que las cantidades para cada edad son estacionarias

$$c_t^1 = c_{t+1}^1 = c^1 \quad , \text{ etc.}$$

pero NO implica que las cantidades sean independientes de la edad

$$c^1 \neq c^2 \quad , \text{ en general}$$

En un equilibrio estacionario, los agentes individuales no tienen un comportamiento estacionario (constante), pues sus decisiones dependen de la edad; a nivel agregado, la economía si es estacionaria

En un equilibrio estacionario, se cumple la ecuación de Euler

$$\frac{u'(c^1)}{\beta u'(c^2)} = R(K^*)$$

la restricción presupuestaria intertemporal

$$c^1 + \frac{c^2}{R(K^*)} = w(K^*)$$

en donde  $w(K^*)$  y  $R(K^*)$  son los precios de equilibrio

Podemos derivar de manera similar el consumo de cada tipo de agente y el ahorro de la economía como funciones del capital agregado

$$a^2 = S(K^*)$$

El valor del capital agregado en un equilibrio estacionario resuelve la ecuación  $S(K^*) = K^*$

Proposición: *Todo equilibrio estacionario en el cual  $R(K^*) > 1$  es eficiente*

Sea  $(c^1, c^2, c^3$  y  $K^*)$  un equilibrio estacionario. Podemos verificar que satisface las condiciones de primer orden del problema de un planificador social

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t [u(c_t^1) + \beta u(c_{t+1}^2)] \\ \text{s.a.} \quad & c_t^1 + c_t^2 = f(K_t) + (1 - \delta)K_t - K_{t+1} \end{aligned}$$

que descuenta el peso de generaciones futuras a la tasa  $\gamma$

La solución de este problema es un óptimo de Pareto

Las condiciones de primer orden de este problema son

$$\frac{u'(c_t^1)}{\beta u'(c_{t+1}^2)} = f'(K_{t+1}) + (1 - \delta)$$

y

$$\frac{u'(c_t^1)}{\beta u'(c_t^2)} = \frac{1}{\gamma}$$

además de

$$c_t^1 + c_t^2 = f(K_t) + (1 - \delta)K_t - K_{t+1}$$

Vemos que el equilibrio estacionario satisface estas condiciones con la tasa de descuento  $\gamma = R(K^*)^{-1}$

Nótese que necesitamos  $R(K^*) > 1$  para que  $\gamma < 1$  y el problema del planificador social esté bien definido ■

Por el contrario, si  $R(K^*) < 1$  el equilibrio es *dinámicamente ineficiente*

- $R(K^*) < 1$  implica que  $f'(K^*) < \delta$ , luego hay sobreacumulación de capital por encima de su límite eficiente
- Pese a tener un retorno negativo, los agentes jóvenes ahorran aún más pues necesitan contar con un ingreso para el retiro
- En este contexto, la intervención pública a través de un sistema de seguridad social puede mejorar el bienestar

### Un Ejemplo Ilustrativo

Un caso sencillo ocurre con función de utilidad logarítmica y función de producción Cobb-Douglas

$$u(c_t) = \log(c_t) \quad f(K_t) = K_t^\alpha$$

Del problema del agente joven obtenemos la ecuación de Euler

$$c_{t+1}^2 = \beta R_{t+1} c_t^1$$

de donde

$$c_t^1 = \frac{w_t}{1 + \beta} \quad c_t^2 = \frac{\beta R_t w_{t-1}}{1 + \beta}$$

y

$$a_{t+1}^2 = \frac{\beta w_t}{1 + \beta}$$

Nótese que el ahorro no depende de  $R_{t+1}$ ; los efectos ingreso y sustitución de la tasa de interés se cancelan

Del problema de la empresa

$$w_t = (1 - \alpha) K_t^\alpha \quad R_t = \alpha K_t^{\alpha-1} + (1 - \delta)$$

Combinando, tenemos la función de ahorro

$$S(K_t) = \frac{\beta(1 - \alpha) K_t^\alpha}{1 + \beta}$$

y la ecuación en diferencias de primer orden

$$K_{t+1} = \frac{\beta(1 - \alpha)}{1 + \beta} K_t^\alpha$$

que caracteriza la dinámica del capital por trabajador

Podemos ver fácilmente que en este caso particular existe un único equilibrio estacionario con capital positivo

$$K^* = \left[ \frac{\beta(1 - \alpha)}{1 + \beta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

en el cual

$$R(K^*) = \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \left( \frac{1 + \beta}{\beta} \right) + (1 - \delta)$$

y que será eficiente solo si  $\left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \left( \frac{1 + \beta}{\beta} \right) > \delta$

También podemos mostrar en este caso que partiendo de cualquier  $K_0 > 0$  el capital agregado converge monotónicamente a su valor de equilibrio estacionario (*estabilidad global*)

Con otras funciones de utilidad y/o producción:

- Puede haber multiples equilibrios estacionarios
- Algunos equilibrios estacionarios pueden ser eficientes, otros no
- Algunos equilibrios estacionarios pueden ser estables, otros no
- La transición hacia alguno de los equilibrios estacionarios estables puede ser no-monotónica (oscilatoria, incluso caótica)

Paréntesis: Altruismo y Modelos Dinásticos

Consideremos ahora individuos altruistas a los cuales les preocupa no solo su utilidad, sino la de las generaciones futuras (hijos, etc.)

En particular

$$U_j = \log(c_j^1) + \beta [\log(c_{j+1}^2) + \psi U_{j+2}]$$

en donde  $U_j$  es la utilidad de un joven nacido en el período  $j$  y  $\psi \in (0, \beta]$  mide el grado de *altruismo*

Es decir

$$U_j = \sum_{t=0}^{\infty} (\beta\psi)^t [\log(c_{j+2t}^1) + \beta \log(c_{j+2t+1}^2)]$$

Esta versión del modelo es similar a la de un modelo de agentes que viven un número infinito de períodos (*dinastías*)

El problema de un joven en el período cero será

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} (\beta\psi)^t \left[ \log(c_{2t}^1) + \beta \log(c_{2t+1}^2) \right] \\ \text{s.a.} \quad & c_{2t}^1 + a_{2t+1}^2 = w_{2t} + R_{2t}a_{2t}^1 \\ & c_{2t+1}^2 + a_{2t+2}^1 = R_{2t+1}a_{2t+1}^2 \quad \forall t \geq 0 \\ & a_0^1 \text{ dado} \end{aligned}$$

en donde  $a_{2t+2}^1$  son herencias que se dejan a la siguiente generación (pueden ser negativas), luego

$$K_t = a_t^1 + a_t^2$$

El resto del modelo es igual

Las ecuaciones de Euler obtenidas del modelo dinámico son

$$\frac{u'(c_t^1)}{\beta u'(c_{t+1}^2)} = R_{t+1} \quad \frac{u'(c_{t+1}^2)}{\psi u'(c_{t+2}^1)} = R_{t+2}$$

y por lo tanto

$$u'(c_t^1) = \beta\psi R_{t+1}R_{t+2}u'(c_{t+2}^1)$$

En un equilibrio estacionario,  $c_t^1 = c_{t+2}^1 = c^1$  implica  $R(K^*) = (\beta\psi)^{-\frac{1}{2}}$

En el modelo dinámico existe una única tasa de interés consistente con un equilibrio estacionario; su valor depende tan solo del factor de descuento y del grado de altruismo

Es fácil demostrar nuevamente que este equilibrio estacionario es eficiente

Nótese finalmente que si el grado de altruismo aumenta, disminuye la tasa de interés en el equilibrio estacionario

- Mayor altruismo que los agentes jóvenes acumulan más capital, con la finalidad no solo de consumir cuando sean retirados sino de dejar herencias a las futuras generaciones
- Con perfecto altruismo ( $\psi = \beta$ ), la tasa de interés es la inversa del factor de descuento  $R(K^*) = \beta^{-1}$  como en el modelo con horizonte infinito

Fin del paréntesis

### Equilibrio Competitivo Recursivo

Las variables de estado son ahora

- Estado individual: edad  $e = \{1, 2\}$  y activos  $a \in (-B, \infty)$
- Estado agregado: la distribución o medida  $\mu_t(e, a)$  de agentes sobre edades y activos

Esta distribución satisface

$$\lim_{a \rightarrow -B} \mu_t(2, a) = 0 \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \mu_t(2, a) = 1$$

$$\mu_t(1, a) = 0 \quad , \forall a \neq 0$$

Un Equilibrio Competitivo Recursivo es un conjunto de funciones  $v(e, a, \mu)$ ,  $c(e, a, \mu)$ ,  $a'(e, a, \mu)$ , precios  $w(\mu)$  y  $R(\mu)$ , demanda de capital  $K(\mu)$  y ley de movimiento  $\Gamma(\mu)$  tales que:

i) Para cada par  $(a, \mu)$ , dadas las funciones  $w$  y  $\Gamma$ , la función de valor  $v(1, a, \mu)$  resuelve la ecuación de Bellman del agente joven:

$$v(1, a, \mu) = \max_{c, a'} \{u(c) + \beta v(2, a', \mu')\}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } c + a' &= w(\mu) \lambda_1 + R(\mu) a \\ \mu' &= \Gamma(\mu) \end{aligned}$$

y  $c(1, a, \mu)$ ,  $a'(1, a, \mu)$  son reglas de decisión óptimas para este problema

ii) Para cada par  $(a, \mu)$ , dadas la función  $R$ , la función de valor  $v(2, a, \mu)$  del agente retirado satisface:

$$v(2, a, \mu) = u(R(\mu) a)$$

y definimos  $c(2, a, \mu) = R(\mu) a$ ,  $a'(2, a, \mu) = 0$

iii) Para cada  $\mu$ , los precios satisfacen las condiciones marginales de la empresa representativa:

$$R(\mu) = f'(K(\mu)) + (1 - \delta)$$

$$w(\mu) = f(K(\mu)) - f'(K(\mu)) K(\mu)$$

iv) Para cada  $\mu$ , los mercados se vacían:

$$f(K(\mu)) = \sum_{e=1}^2 \int_{-B}^{\infty} [c(e, a, \mu) + a'(e, a, \mu) - (1 - \delta)a] d\mu(e, a)$$

$$K(\mu) = \sum_{e=1}^2 \int_{-B}^{\infty} a d\mu(e, a)$$

v) Para cada  $\mu$ , la ley de movimiento  $\Gamma$  es consistente con las decisiones óptimas de los agentes (*expectativas racionales*)

Resolviendo Numéricamente el Equilibrio Estacionario

El estado agregado de la economía se reduce al capital total  $K^*$

Discretizamos el espacio de posibles valores de los activos individuales

$$a \in \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$$

La idea es iterar en  $K^*$  hasta lograr convergencia

Para cada valor de  $K^*$ , resolvemos primero el problema del agente viejo y retrocedemos hacia los agentes más jóvenes (inducción hacia atrás)

Algoritmo iterativo:

1. Proponer un valor para  $K^*$  y calcular los precios correspondientes  $R(K^*)$  y  $w(K^*)$
2. Dados los precios, calcular la función de valor del agente retirado  $v(2, a_i) = u(R(K^*) a_i)$  para cada punto  $a_i \in \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$
3. Dados los precios y  $v(2, a)$ , calcular la función de valor del agente joven  $v(1, 0)$  resolviendo el problema

$$v(1, 0) = \max_{a_j \in \{a_1, a_2, \dots, a_N\}} \{u(w(K^*) - a_j) + \beta v(2, a_j)\}$$

y guardar  $a'(1) = a_j$

4. Calcular el capital agregado correspondiente a la regla de decisión halladas en el paso 3

$$\widehat{K} = a'(1)$$

5. Comparar  $K^*$  y  $\widehat{K}$

- Si son iguales (sujeto a un margen de tolerancia), hemos terminado
- Si son diferentes, volver al paso 1 con un nuevo  $K^*$

$$K_{nuevo}^* = \frac{K_{inicial}^* + \widehat{K}}{2}$$

Resolver numéricamente los modelos de generaciones solapadas es más sencillo que los modelos correspondientes con horizonte de vida infinito

- La razón es que para encontrar la función de valor de cada agente no hay que encontrar un punto fijo en la ecuación de Bellman

El algoritmo se puede adaptar fácilmente a más períodos de vida

También se puede modificar para calcular la *transición* al equilibrio estacionario

- Idea: suponer que en  $T$  períodos se alcanza el equilibrio estacionario e iterar sobre un vector  $\{K_0, K_1, \dots, K_T\}$

### Algunas Implicaciones del Modelo y Extensiones

- La estructura de edades y el perfil de ingreso a lo largo de la vida son claves para explicar las diferencias en tasas de ahorro entre pobres y ricos (Huggett y Ventura, *JME* 2000)
- Cambios demográficos afectan la sostenibilidad del sistema impositivo y de seguridad social (Auerbach y Kotlikoff, *Dynamic Fiscal Policy* 1987)

Contabilidad generacional

- Restricciones de crédito para la educación escolar explican parte importante de la persistencia intergeneracional en la distribución del ingreso (Restuccia y Urrutia, *AER* 2004)

## PROBLEMAS SELECCIONADOS

### 1. Crecimiento de la población y seguridad social

Considere un modelo de generaciones solapadas en la que los agentes viven dos períodos, pero con crecimiento de la población. En particular, en cada período nace una masa  $[0, L_t]$  de agentes jóvenes, en donde  $L_t$  crece a la tasa exógena  $n$ . La función de producción es entonces

$$Y_t = F(K_t, L_t) \quad \Rightarrow \quad y_t = f(k_t)$$

en donde  $y_t$  y  $k_t$  son el producto y el capital por trabajador de la economía. La condición de factibilidad es ahora

$$f(k_t) = c_t^1 + c_t^2 + (1+n)k_{t+1} - (1-\delta)k_t$$

con

$$(1+n)k_{t+1} = a_{t+1}^2$$

Nótese que el ahorro de los jóvenes se distribuye mañana como capital entre un mayor número de trabajadores, dado el crecimiento de la población.

- i) Usando variables agregadas por trabajador, defina un equilibrio competitivo secuencial para esta economía
- ii) Caracterice lo mejor posible el equilibrio (halle las ecuaciones de Euler, etc.)
- iii) Defina un equilibrio estacionario y caracterice lo mejor posible el valor del capital por trabajador  $k^*$  en dicho equilibrio
- iv) Demuestre que todo equilibrio estacionario con  $R(k^*) > 1+n$  es eficiente
- v) Asuma ahora una función de utilidad logarítmica y una función de producción Cobb-Douglas. Para ese caso especial, encuentre la función de ahorro óptima  $S(k_t)$  y analice la dinámica del capital agregado. ¿Cómo depende esta dinámica de la tasa de crecimiento de la población?

vi) Para el caso especial del inciso anterior, encuentre el capital por trabajador en un equilibrio estacionario  $k^*$  y muestre bajo que combinaciones de parámetros el equilibrio estacionario es eficiente

vii) [Más difícil] Suponga que los parámetros son tales que el equilibrio estacionario del inciso anterior no es eficiente. Suponga ahora que el gobierno implementa un sistema de seguridad social en el cual el cobra un impuesto  $\tau$  a los agentes jóvenes y lo reparte entre los agentes viejos. Las restricciones presupuestarias serían entonces

$$\begin{aligned} c_t^1 + a_{t+1}^2 &= w_t - \tau \\ c_{t+1}^2 &= R_{t+1}a_{t+1}^2 + (1+n)\tau \end{aligned}$$

Encuentre la función de ahorro óptima  $S(k_t, \tau)$  y analice la dinámica del capital agregado. ¿Cómo depende esta dinámica del impuesto  $\tau$ ? Encuentre el capital por trabajador en un equilibrio estacionario  $k^*(\tau)$  y muestre como con un impuesto positivo el gobierno puede restaurar un equilibrio estacionario eficiente

## 2. Un modelo con tres períodos de vida

Considere un modelo de generaciones solapadas sin crecimiento de la población, pero en el cual los agentes viven tres períodos. El problema de un agente joven es ahora

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t^1, c_{t+1}^2, c_{t+2}^3, a_{t+1}^2, a_{t+2}^3\}} & u(c_t^1) + \beta u(c_{t+1}^2) + \beta^2 u(c_{t+2}^3) \\ \text{s.t.} & c_t^1 + a_{t+1}^2 = w_t \lambda_1 \\ & c_{t+1}^2 + a_{t+2}^3 = w_{t+1} \lambda_2 + R_{t+1} a_{t+1}^2 \\ & c_{t+2}^3 = R_{t+2} a_{t+2}^3 \end{aligned}$$

con  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$  y  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Las condiciones de vaciado de mercado son entonces

$$Y_t = f(K_t) = c_t^1 + c_t^2 + c_t^3 + K_{t+1} - (1 - \delta) K_t$$

$$K_t = a_t^2 + a_t^3$$

- i) Defina un equilibrio competitivo secuencial para esta economía
- ii) Caracterice lo mejor posible el equilibrio (halle las ecuaciones de Euler, etc.)
- iii) Defina un equilibrio estacionario y caracterice lo mejor posible el valor del capital agregado  $K^*$  en dicho equilibrio
- iv) Asuma ahora una función de utilidad logarítmica y una función de producción Cobb-Douglas. Para ese caso especial, encuentre la función de ahorro óptima  $S(k_t, k_{t+1}, k_{t+2})$  y analice gráficamente la dinámica del capital agregado. ¿Podemos asegurar que la trayectoria hacia el equilibrio estacionario es monotónica?
- v) Volviendo al caso general, defina un equilibrio competitivo recursivo para esta economía y describa un algoritmo iterativo para resolver el equilibrio estacionario
- vi) Generalice el algoritmo del inciso anterior para una economía en la cual los agentes viven un número  $T > 3$  de períodos