Instituto Tecnológico Autónomo de México

Primera Tarea de Economía Política: Paradoja de Condorcet y Reglas Electorales

Profesor César Martinelli
Primavera 2010

1. (*Transitividad*) Demuestre que una relación binaria R es transitiva sobre X si y sólo si las tres siguientes condiciones se cumplen para todo $\{x, y, z\} \subseteq X$:

   (i) xPy & $yPz \Rightarrow xPz$

   (ii) xIy & $yIz \Rightarrow xIz$

   (iii) xIy & $yPz \Rightarrow xPz$ y xPy & $yIz \Rightarrow xPz$

   Demuestre que si R es completa (aunque no necesariamente transitiva), entonces (i) y (ii) implican (iii).

2. (*Aciclicidad*) Una relación binaria R es acíclica sobre X si y sólo si para todo $\{x, y, z, \ldots, u, v\} \subseteq X$, xPy & yPz & $\ldots$ $uPv \Rightarrow xPv$. Sea $M(R, S) = \{x \in S \subseteq X : \forall y \in S,\ xRy\}$ el conjunto máximo asociado con S. Demuestre que $M(R, S)$ es no vacío para todo $S \subseteq X$ si y sólo si R es acíclica sobre X.

3. (*Más sobre aciclicidad*) Una relación binaria R es triple-acíclica sobre X si y sólo si para todos los triples $\{x, y, z\} \subseteq X$, R es acíclica sobre $\{x, y, z\}$. Demuestre que si R es acíclica sobre X entonces es triple-acíclica sobre X, pero no viceversa.

4. (*Elección social binaria*) En un problema de elección social binario, demuestre que existen reglas de elección social que son anónimas y neutrales pero no monotónicas, anónimas y monotónicas pero no neutrales, neutrales y monotónicas pero no anónimas, anónimas pero no neutrales ni monotónicas, neutrales pero no anónimas ni monotónicas, monotónicas pero no anónimas ni neutrales, ni anónimas ni neutrales ni monotónicas.

5. (*Reglas electorales: propiedades*) En clase hemos considerado las siguientes reglas de agregación de preferencias:

   a) Regla de Condorcet: Comparamos las alternativas una a una. Alternativa x es estrictamente preferible para la sociedad a alternativa y si y sólo si el número de individuos que prefiere estrictamente x es mayor que el número de individuos que prefiere estrictamente y. Si alguna alternativa puede derrotar a cada una de las demás por mayoría en comparaciones una a una, entonces constituye el ganador de Condorcet. Un problema de esta regla es que, como vimos en clase, puede generar preferencias sociales intransitivas.

   b) Regla de la unanimidad: Comparamos las alternativas una a una. Alternativa x es estrictamente preferible para la sociedad a alternativa y si y sólo si todos los individuos en la sociedad prefieren estrictamente x a y. Es un caso límite de las reglas de mayoría calificada.

   c) Regla de Borda: Si existen k alternativas, cada votante asigna $k-1$ puntos a su alternativa favorita, $k-2$ puntos a la segunda, y así sucesivamente. Contamos cuantos puntos en total recibe cada alternativa y elegimos aquella que tiene mayor puntaje. ¿Qué propiedades deseables tiene? ¿Qué inconvenientes le encuentra? Note que esta regla genera siempre preferencias sociales transitivas.

   d) Regla de la pluralidad: Simplemente ordenamos las alternativas de acuerdo a cuántas veces aparece cada una como favorita de los votantes.

   e) Regla de la segunda vuelta: Si alguna alternativa es la favorita de más de la mitad de los votantes, la ponemos primero en el orden de preferencias de la sociedad. En caso contrario, eliminamos del perfil de preferencias todas las alternativas excepto las dos que aparecen más veces como favoritas y, considerando el nuevo perfil de preferencias, escogemos aquella alternativa que es la favorita de la mayoría de votantes.

   f) Regla del voto transferible: Si alguna alternativa es la favorita de más de la mitad de los votantes, la ponemos primero en el orden de preferencias de la sociedad. En caso contrario, eliminamos del perfil de preferencias la alternativa menos votada como favorita y, considerando el nuevo perfil de preferencias, repetimos el procedimiento descrito.

g) Regla de Copeland: Cada alternativa recibe un punto por cada otra alternativa que puede derrotar en comparaciones una a una; elegimos aquella alternativa que tiene la mayoría de los puntos. (Este método es similar a los usados en muchos torneos deportivos.)

h) Regla de Young: Cada alternativa recibe un puntaje igual al subconjunto más grande de la sociedad para el cual dicha alternativa es un ganador de Condorcet.

En clase hemos dado también las definiciones de las siguientes propiedades deseables de una regla de agregación de preferencias:

a) Propiedad de Pareto [P]: Si cada individuo prefiere estrictamente x a y, entonces la sociedad prefiere estrictamente x a y.

b) Anonimidad [A]: Las preferencias de la sociedad dependen únicamente de la colección de preferencias individuales, no en quién tiene qué preferencias.

c) Independencia de Alternativas Irrelevantes [I]: Si las preferencias de los individuos sobre una alternativa $z \neq x, y$ cambian pero las preferencias de los individuos respecto del par x, y se mantienen constantes, entonces las preferencias de la sociedad respecto del par x, y se mantienen constantes.

d) Transitividad [T]: Todo perfil de preferencias de los individuos genera preferencias sociales que son racionales, es decir completas y transitivas.

Para cada una de las reglas anteriormente descritas, diga cuáles de las propiedades descritas anteriormente se aplican. Si la propiedad se aplica, provea un argumento; si no, provea un contraejemplo.

6. (*Reglas electorales: ejemplos*) Encuentre el ganador (si existe) de acuerdo a la regla de la mayoría (Condorcet), la regla de Borda, la rgla de la pluralidad simple, la regla de la segunda vuelta, la regla del voto transferible, la regla de Copeland y la regla de Young (elegir el ganador de Condorcet y si no lo hay, elegir la alternativa que es un ganador de Condorcet para el subconjunto más grande votantes) para cada uno de los siguientes perfiles de preferencias (los números en paréntesis indican el número de miembros de la sociedad que comparten ese orden de preferencias). Encuentre también el conjunto de óptimos de Pareto en cada caso.

a)

(2)	(3)	(2)	(4)
A	B	B	C
B	C	A	A
C	A	C	B

b)

(8)	(7)	(6)
A	B	C
B	C	B
C	A	A

c)

(1)	(1)	(1)	(1)	(1)
D	D	C	A	C
A	B	A	D	B
B	C	B	B	D
C	A	D	C	A

d)

(5)	(4)	(3)	(3)
A	D	C	C
B	B	A	B
C	A	B	D
D	C	D	A

e)

(6)	(2)	(4)	(5)
A	B	B	C
B	A	C	A
C	C	A	B

f)

(3)	(3)	(3)	(2)
B	B	A	A
A	A	C	D
C	D	D	C
D	C	B	B

g)

(18)	(12)	(10)	(9)	(4)	(2)
A	B	C	D	E	E
D	E	B	C	B	C
E	D	E	E	D	D
C	C	D	B	C	B
B	A	A	A	A	A

7. (*Teorema de Arrow*) considere un problema de elección con dos individuos (1 y 2) y tres alternativas (A, B y C). Como en clase, suponga que los individuos tienen preferencias estrictas, y considere una regla f que satisfaga las propiedades P e I descritas arriba. Demuestre que si para todo par de alternativas x, y la regla decide que si xP_1y y yP_2x entonces xIy, la regla genera preferencias intransitivas. Nota: dicha regla es la regla de la unanimidad.

8. (*Reparto de ganancias*) Tres individuos deben repartirse mil pesos, y la utilidad de cada individuo es igual a la suma de dinero que recibe. Encuentre el ganador de Condorcet (si existe) y el conjunto de óptimos de Pareto.

9. (*Reparto de costos*) Tres individuos deben pagar en conjunto mil pesos, y la utilidad de cada individuo es igual a menos la suma de dinero que paga. Encuentre el ganador de Condorcet (si existe) y el conjunto de óptimos de Pareto.

10. (*Eficiencia y mayoría*) Suponga que hay un proyecto para producir un bien público, digamos un anillo vehicular alrededor de la ciudad de México. El beneficio neto del proyecto medido en pesos (descontando el aumento de impuestos para financiarlo) es $v_i \in \Re$ para cada individuo $i \in I$, donde I es la sociedad. Obviamente, v_i puede ser positivo, negativo o cero. Demuestre que una votación por mayoría escoge un resultado Pareto óptimo si el conjunto de alternativas es construir el

segundo piso o no construirlo, pero no garantiza alcanzar un óptimo si el conjunto de alternativas incluye transferencias monetarias entre los agentes. Compare la decisión colectiva bajo mayoría con el óptimo de Pareto cuando las transferencias monetarias entre los agentes son posibles. (Pista: en este último caso, piense en la posibilidad de maximizar la suma de beneficios netos.)