

Tarea 2

Soluciones

Fecha de entrega: 12 de septiembre de 2006

Entregas individuales

1. Integración numérica

1. Demostrar la fórmula de la regla del punto medio.

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)$$

Dem. Sea $m = \frac{a+b}{2}$ (el punto medio). Realizemos la expansión de Taylor de grado uno alrededor del punto medio del intervalo

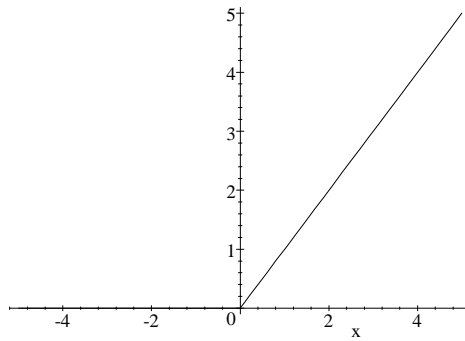
$$f(x) = f(m) + (x-m)f'(m) + \frac{1}{2!}(x-m)^2f''(\xi)$$

donde $\xi \in (a, b)$. Integrando de ambos lados tenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= (b-a)f(m) + f'(m) \int_a^b (x-m)dx + \int_a^b \frac{1}{2!}(x-m)^2f''(\xi)dx \\ &= (b-a)f(m) + 0 + \frac{1}{2!}f''(\xi) \int_a^b (x-m)^2 \\ &= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el teorema del valor medio para sacar el segundo término de la integral.

2. En el texto.



Función $f(x) = \max(0, x)$

```
>> syms x t
```

```
>> y=x;
```

```
>> int(y,0,1)
```

```
ans =
```

```
1/2
```

```
octave:6> Trap('t1',-1,1,2)
```

```
h = 1
```

```
ans = 0.50000
```

```
octave:7> Trap('t1',-1,1,3)
```

```
h = 0.66667
```

```
ans = 0.55556
```

```
octave:8> Trap('t1',-1,1,4)
```

```
h = 0.50000
```

```
ans = 0.50000
```

```
octave:9> Trap('t1',-1,1,5)
```

```
h = 0.40000
```

```
ans = 0.52000
```

Vemos que en efecto la integral es exacta cuando tomamos un número impar de puntos (recordar que $n=1$ quiere decir que estamos tomando sólo los dos puntos de los extremos del intervalo).

3. Aproximar las siguientes integrales a través de

- a) La regla compuesta trapezoidal con 2 subintervalos
- b) La regla compuesta trapezoidal con 10 subintervalos

- c) La regla de Simpson compuesta con 2 subintervalos
d) La regla de Simpson compuesta con 10 subintervalos

3.1. $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

- a) 1.5
b) 1.5675
c) 1.6667
d) 1.5708

3.2. $\int_2^3 \sqrt{x^2 - 4} dx$

- a) 1.3090
b) 1.4172
c) 1.3727
d) 1.4241

3.3. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$

- a) 1.6089
b) 1.6520
c) 1.5507
d) 1.6528

4. Integrar exactamente $\int_{\sin(t)}^1 2x dx$

```
>> syms x t
```

```
>> y=2*x;
```

```
>> int(y,sin(t),1)
```

```
ans =
```

```
1-sin(t)^2
```