Aversión al riesgo, equivalente cierto y precios de reserva

Ricard Torres

ITAM

Economía Financiera, 2015

Índice

Utilidad esperada y aversión al riesgo

- Supongamos que las preferencias tienen la propiedad de la utilidad esperada, es decir, hay una función de utilidad de Bernoulli sobre riqueza $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, dadas dos variables aleatorias X e Y, tenemos:

$$X \succcurlyeq Y \iff \mathbb{E}[u(X)] \geq \mathbb{E}[u(Y)]$$

- Decimos que las preferencias muestran aversión al riesgo si, dada cualquier variable aleatoria X, el individuo siempre prefiere la cantidad $\mathbb{E}(X)$ sin riesgo a X, es decir:

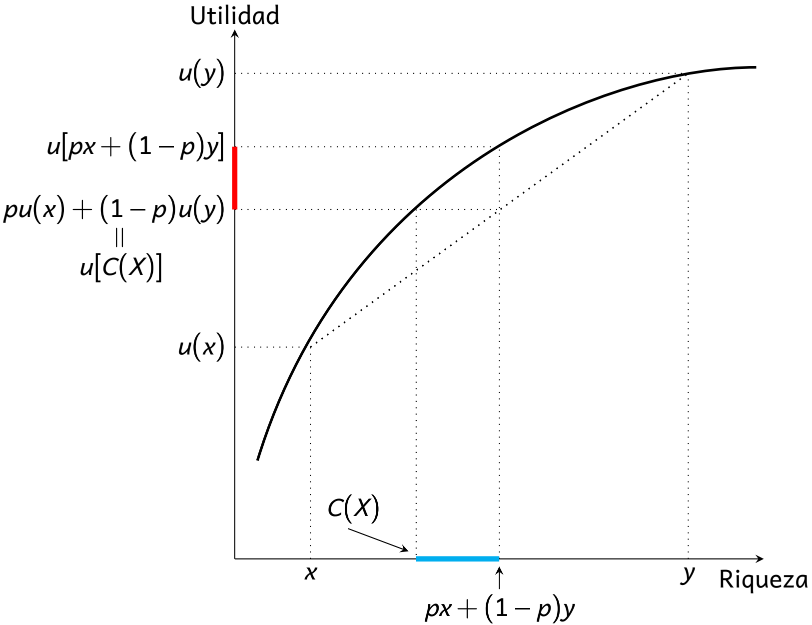
$$u[\mathbb{E}(X)] \geq \mathbb{E}[u(X)], \quad \text{para cualquier variable aleatoria } X$$

Concavidad y aversión al riesgo

- Supongamos que X pone probabilidad positiva únicamente en dos niveles de riqueza, digamos x e y, con probabilidades respectivas p y $1-p$, para un cierto $0<p<1$.
- Entonces la desigualdad anterior se reduce a:

$$u[px+(1-p)y] \geq p\,u(x)+(1-p)\,u(y)$$

- Que esta propiedad se satisfaga para todo $\{x,y\}$ en un cierto intervalo, y para todo $0<p<1$, es equivalente al concepto de concavidad de la función $u(\cdot)$.
- Este resultado se generaliza por inducción cuando X pone probabilidad positiva en un número finito cualquiera de valores, y en general para cualquier variable aleatoria X (desigualdad de Jensen), de forma que cualquier función $u(\cdot)$ cóncava sigue satisfaciendo la desigualdad de valores esperados que hemos definido como aversión al riesgo.



Función de utilidad de Bernoulli con aversión al riesgo

Interpretación

- En el gráfico podemos apreciar, en el eje de las utilidades, que la aversión al riesgo implica $u[\mathbb{E}(X)] = u[px + (1-p)y] > p\,u(x) + (1-p)\,u(y) = \mathbb{E}[u(X)]$.
- Esta misma desigualdad se traduce, en el eje de la riqueza, por $\mathbb{E}(X) = px + (1-p)y > C(X)$, para $C(X)$ definida como aquel nivel de riqueza que satisface $u[C(X)] = \mathbb{E}[u(X)]$.
- Si la variable aleatoria X representa toda la riqueza del individuo, entonces decimos que $C(X)$ es el equivalente cierto de esta riqueza, ya que es aquel nivel de riqueza con certidumbre que nos proporciona la misma utilidad que la riqueza aleatoria X.

Precio de reserva por la venta de un activo

- Hay un concepto relacionado con el del equivalente cierto de la riqueza del individuo: el de precio de reserva.
- Supongamos que un individuo posee un determinado activo financiero representado por la variable aleatoria X.
- Sea W otra variable aleatoria que indica el resto de la riqueza del individuo (que, en general, sería una cartera de activos, más que un único activo).
- Definimos el precio de reserva por la venta de X como aquella cantidad de dinero r que hace que el individuo sea indiferente entre poseer $W + X$ y poseer W más la cantidad r.
- Notemos que, aunque el individuo sea averso al riesgo, el precio de reserva puede ser superior o inferior al valor esperado del activo, dependiendo de cómo sea la distribución conjunta del vector (W, X).

Caracterización del precio de reserva

- Denotemos mediante R una variable aleatoria degenerada que pone probabilidad 1 en la cantidad de dinero r.
- Entonces el precio de reserva satisface: $\mathbb{E}\{u(W+X)\} = \mathbb{E}\{u(W+R)\}$.
- Denotemos mediante $S(\cdot)$ el conjunto de valores que toma una variable aleatoria (el soporte de su distribución).
- Si suponemos que tanto W como X tienen un soporte finito, podemos escribir la relación que caracteriza el precio de reserva como:

$$\sum_{x \in S(X)} \sum_{w \in S(W)} u(x+w)\,\mathbb{P}(X=x, W=w) = \sum_{w \in S(W)} u(w+r)\,\mathbb{P}(W=w).$$

- Dadas las distribuciones de X y W, la expresión anterior es una ecuación cuya solución es el precio de reserva r.

Ejemplo: independencia

- Supongamos que la utilidad de Bernoulli es $u(y) = \sqrt{y}$.
- La distribución (conjunta), distribuciones marginales, y valores de los activos son:

		X: 400	X: 2000	
W	500	.20	.30	.50
W	5225	.20	.30	.50
		.40	.60	

- Notar que, en cada caso, la distribución conjunta es el producto de las marginales: esto quiere decir que las variables aleatorias W y X son independientes.

Ejemplo: independencia (cont)

- La utilidad esperada de poseer $W+X$ es:

$$\mathbb{E}\{u(W+X)\} = .20\sqrt{900} + .30\sqrt{2500} + .20\sqrt{5625} + .30\sqrt{7225} = 61.5$$

- Dada una cantidad de dinero r, la utilidad esperada de poseer $W+R$ es:

$$\mathbb{E}\{u(W+R)\} = .50\sqrt{500+r} + .50\sqrt{5225+r}$$

- Si igualamos esta última expresión a 61.5 y resolvemos la ecuación, su solución es $r = 1288.7$ (por ejemplo, podemos usar la función `fzero` de `Matlab`).
- En este caso, $r < \mathbb{E}(X) = 1360$.

Ejemplo: correlación positiva

- Supongamos ahora que la distribución conjunta es (los valores y distribuciones marginales son iguales a los del ejemplo anterior):

		X		
		400	2000	
W	500	.40	.10	.50
	5225	.00	.50	.50
		.40	.60	

- En este caso, podemos ver cómo la probabilidad conjunta tiende a concentrarse en la diagonal principal: hay una fuerte correlación positiva (el coeficiente de correlación es 0.816).

Ejemplo: correlación positiva (cont)

- La utilidad esperada de poseer $W + X$ es:

$$\mathbb{E}\{u(W+X)\} = .40\sqrt{900} + .10\sqrt{2500} + .00\sqrt{5625} + .50\sqrt{7225} = 59.5$$

- Dada una cantidad de dinero r, la ecuación cuya solución es el precio de reserva es:

$$.50\sqrt{500+r} + .50\sqrt{5225+r} = 59.5$$

- La solución de la ecuación es ahora $r = 1071.9$, inferior al precio de reserva cuando hay independencia, pues el activo X, al estar positivamente correlacionado con W, le añade mucho riesgo.
- Así pues, con mayor motivo se sigue cumpliendo $r < \mathbb{E}(X) = 1360$.

Ejemplo: correlación negativa

- Supongamos ahora que la distribución conjunta es (los valores y distribuciones marginales siguen siendo los mismos):

		X: 400	X: 2000	
W	500	.00	.50	.50
W	5225	.40	.10	.50
		.40	.60	

- En este caso, podemos ver cómo la probabilidad conjunta en la diagonal principal es mínima: hay una fuerte correlación negativa (el coeficiente de correlación es -0.816).

Ejemplo: correlación negativa (cont)

- La utilidad esperada de poseer $W + X$ es:

$$\mathbb{E}\{u(W + X)\} = .00\sqrt{900} + .50\sqrt{2500} + .40\sqrt{5625} + .10\sqrt{7225} = 63.5$$

- Dada una cantidad de dinero r, la ecuación cuya solución es el precio de reserva es:

$$.50\sqrt{500 + r} + .50\sqrt{5225 + r} = 63.5$$

- La solución de la ecuación es ahora $r = 1515.8$, muy superior al precio de reserva en los casos de independencia y de correlación positiva.
- En este caso, $r > \mathbb{E}(X) = 1360$. El motivo es que, al estar negativamente correlacionado con el resto de la riqueza W, el activo X disminuye el riesgo de la riqueza total: la desviación típica de W es 2314.77, mientras que la de $W + X$ es 1724.57.

Precio de reserva por la compra de un activo

- Este problema es similar al de la determinación del precio de reserva por la venta de un activo, pero el marco es distinto.
- Supongamos que el individuo posee inicialmente una riqueza compuesta por una cartera de activos representada por W, más una cantidad de dinero (sin riesgo) m.
- El precio de reserva por la compra del activo X es aquella cantidad de dinero r (donde suponemos $r \leq m$) que hace que el individuo sea indiferente entre poseer W más la cantidad de dinero m, y poseer $W + X$ más la cantidad de dinero $m - r$.

Caracterización del precio de reserva

- Denotemos mediante M y R, respectivamente, las variables aleatorias degeneradas que ponen probabilidad 1 en las cantidades de dinero m y r.
- Por definición, el precio de reserva por la compra de X satisface: $\mathbb{E}\{u(W+M)\} = \mathbb{E}\{u(W+X+M-R)\}$.
- Si suponemos que tanto W como X tienen un soporte finito, podemos escribir la relación que caracteriza el precio de reserva como:

$$\sum_{w\in S(W)} u(w+m)\,\mathbb{P}(W=w) = \sum_{x\in S(X)} \sum_{w\in S(W)} u(x+w+m-r)\,\mathbb{P}(X=x, W=w)$$

- Dado m, y dadas las distribuciones de X y W, la expresión anterior es una ecuación cuya solución es el precio de reserva r.