Instituto Tecnológico Autónomo de México
Maestría en Finanzas

Economía Financiera (Eco-44105), 2015

Dominancia estocástica y cuantiles para variables aleatorias no negativas

Ricard Torres

Índice general

1 La tranformación de cuantiles o inversa generalizada de una función de distribución

Una función de distribución cumulativa es una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ caracterizada por las siguientes propiedades:

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. F es una función (débilmente) creciente: $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$.
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, y $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
4. F es continua por la derecha: $F(y) = \inf \{F(x) : y < x\}$.

Toda función con las propiedades anteriores puede ser asociada con una variable aleatoria (véase más abajo), y a toda variable aleatoria X se le asocia una función de distribución a través de $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, para $x \in \mathbb{R}$.

Dada una variable aleatoria X y dado un cierto t, con $0 < t < 1$, el ***cuantil correspondiente a*** t es cualquier valor $q \in \mathbb{R}$ que satisface: $\mathbb{P}(X < q) \leq t$ y $\mathbb{P}(X > q) \leq 1 - t$. En general, eso no define una correspondiencia uno-a-uno, por dos tipos de situaciones: (1) a una misma t pueden corresponder distintas q (cuando $t = \mathbb{P}(X \leq q_1) = \mathbb{P}(X \leq q_2)$ para $q_1 < q_2$, entonces cualquier q comprendida entre q_1 y q_2 es un cuantil correspondiente a t); (2) una misma q puede corresponder a distintas t (cuando $\mathbb{P}(X < q) < \mathbb{P}(X \leq q)$, a cualquier t situada entre ambos valores le corresponde q). Sin embargo, podemos singularizar, para cada t, un cuantil particular que define una función que tiene propiedades duales a una función de distribución.

Para $t \in (0,1)$, definimos la ***transformación de cuantiles*** o ***inversa generalizada*** de una función de distribución F mediante:

$$Q(t) = \inf \{x \in \mathbb{R} : t \leq F(x)\}.$$

Por definición, $t \leq F(x)$ implica $Q(t) \leq x$. Ahora bien, como F es continua por la derecha, se cumplirá que $t \leq F[Q(t)]$, por lo que, en la definición de arriba, podemos reemplazar "inf" por "min". Como F es creciente, $Q(t) \leq x$ implica $F[Q(t)] \leq F(x)$, lo cual, teniendo en cuenta la desigualdad previa, implica $t \leq F(x)$. Por tanto, se cumple la doble implicación:

$$t \leq F(x) \iff Q(t) \leq x.$$

De hecho, esta doble implicación *caracteriza* la tranformación de cuantiles. como esta tranformación es una función $Q : (0,1) \to \mathbb{R}$, si consideramos $(0,1)$ como un conjunto de estados de la naturaleza con la distribución uniforme λ en este intervalo, entonces Q es una variable aleatoria. Su distribución es, dado cualquier $x \in \mathbb{R}$:

$$F_Q(x) = \lambda \{t \in (0,1) : Q(t) \leq x\} = \lambda \{t \in (0,1) : t \leq F(x)\} = \lambda(0, F(x)] = F(x),$$

puesto que la distribución uniforme asocia a cada intervalo su longitud. Con eso, hemos mostrado que la variable aleatoria Q tiene distribución F. Ello corrobora nuestra afirmación anterior en relación a *dualidad*: definimos Q a partir de F, y partiendo de Q podemos recuperar F como su función de distribución.

Si $t_1 \leq t_2$, como $t_2 \leq F[Q(t_2)]$, se cumple $Q(t_1) \leq Q(t_2)$. Es decir, Q es (débilmente) creciente.

Dada $t \in (0,1)$, definamos $x = \sup \{Q(s) : 0 < s < t\}$. Para cualquier s con $0 < s < t$, como Q es creciente, se cumple $Q(s) \leq Q(t)$, de forma que $Q(t)$ es una cota superior del conjunto anterior y, por definición de supremo, $x \leq Q(t)$. Como F es creciente, $0 < s < t$ implica $s \leq F[Q(s)] \leq F(x)$. Por tanto, $t = \sup \{s : 0 < s < t\} \leq F(x)$, lo cual implica $Q(t) \leq x$. En conclusión, $Q(t) = x$. Esto muestra que Q es continua por la izquierda.

Sean $a \doteq \lim_{t \downarrow 0} Q(t) = \inf \{Q(t) : 0 < t < 1\}$ y $a' \doteq \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) > 0\}$ (el ínfimo del soporte de F), y notemos que $a, a' \in [-\infty, +\infty)$. Si $F(x) > 0$, entonces $0 < t \leq F(x)$ implica $Q(t) \leq x$; de forma que se cumple $a \leq a'$. Si $0 < t < 1$, entonces $0 < t \leq F[Q(t)]$ implica $a' \leq Q(t)$; por tanto, $a' \leq a$. Concluyendo, $a = a'$.

Análogamente, sean $b \doteq \lim_{t \uparrow 1} Q(t) = \sup \{Q(t) : 0 < t < 1\}$ y $b' \doteq \sup \{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$ (el supremo del soporte de F), y notemos que $b, b' \in (-\infty, +\infty]$. Si $F(x) < 1$, entonces $F(x) < t < 1$ implica $x < Q(t)$; por tanto, $b' \leq b$. Si $0 < t < 1$, hay dos posibilidades: (1) $F[Q(t)] < 1$, de forma que $Q(t) \leq b'$, y (2) $F[Q(t)] = 1$, en cuyo caso para $x < Q(t)$ se cumple $F(x) < t < 1$, lo cual implica $Q(t) = b'$, pero $t < t' < 1 = F[Q(t)]$ implica $Q(t) \leq Q(t') \leq Q(t)$, de forma que $Q(t') = Q(t) = b$; de modo que, en cualquiera de los casos, se cumple $b \leq b'$. En conclusión, $b = b'$.

En resumen, la transformación de cuantiles $Q : (0,1) \to \mathbb{R}$ está characterizada por:

1. $t \leq F(x) \Leftrightarrow Q(t) \leq x$.
2. Q es una función (débilmente) creciente: $0 < t_1 \leq t_2 < 1 \Rightarrow Q(t_1) \leq Q(t_2)$.
3. Q es continua por la izquierda: $Q(t) = \sup \{Q(s) : 0 < s < t\}$.
4. $\inf \{Q(t) : 0 < t < 1\} = \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) > 0\}$, and $\sup \{Q(t) : 0 < t < 1\} = \sup \{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$.

2 Transformación de cuantiles y dominancia estocástica de primer orden

Sean X_A y X_B dos variables aleatorias que toman valores reales. Decimos que X_A domina a X_B en el sentido de *dominancia estocástica de primer orden* si, para cualquier $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea (débilmente) creciente (y para la cual ambos valores esperados estén bien definidos), se cumple $\mathbb{E}[u(X_A)] \geq \mathbb{E}[u(X_B)]$. Esta condición es equivalente a la desigualdad en todo punto de las funciones de distribución: para todo $x \in \mathbb{R}$, $F_A(x) \leq F_B(x)$.

Como la tranformación cuantil es dual de la función de distribución, esta desigualdad debería reflejarse en las correspondientes transformaciones: efectivamente, este es el caso. Dadas $0 < t < 1$ y $x \in \mathbb{R}$, $Q_A(t) \leq x$ implica $t \leq F_A(x) \leq F_B(x)$, lo cual a su vez implica que $Q_B(t) \leq x$; como eso es cierto para toda $x \in \mathbb{R}$, ello es equivalente al hecho que $Q_A(t) \geq Q_B(t)$. Esto demuestra que, cuando hay dominancia estocástica de primer orden entre dos variables aleatorias, siempre podemos encontrar otras dos variables aleatorias que tienen distribuciones respectivamente iguales a las variables originales, y para las cuales hay dominación estado a estado.

3 El valor esperado de variables aleatorias no negativas

Considerar la variable aleatoria no negativa X que pone probabilidades $(1/2, 1/3, 1/6)$ sobre los valores $(10, 20, 30)$. Su función de distribución y correspondiente transformación de cuantiles son:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq y < 10; \\ 1/2, & \text{si } 10 \leq y < 20; \\ 5/6, & \text{si } 10 \leq y < 30; \\ 1, & \text{si } 30 \leq y. \end{cases} \qquad Q(t) = \begin{cases} 10, & \text{si } 0 < t \leq 1/2; \\ 20, & \text{si } 1/2 < t \leq 5/6; \\ 30, & \text{si } 5/6 < t < 1. \end{cases}$$

Hemos representado los gráficos de ambas funciones en la Figura 1.

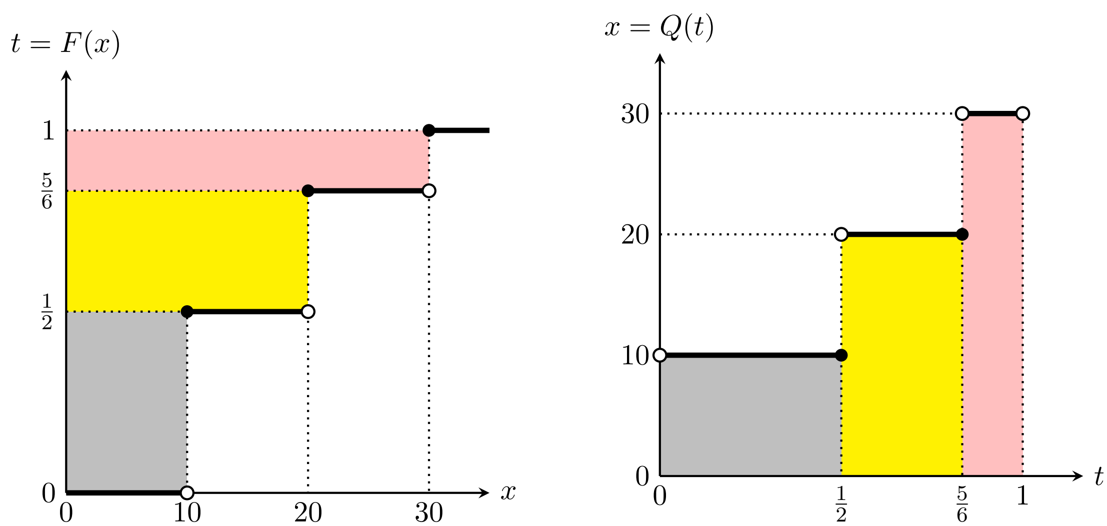

Figura 1: Distribución discreta: su función de distribución (izquierda), y tranformación de cuantiles (derecha).

Observar primero la función de distribución (en la parte izquierda). El rectángulo gris corresponde al producto $10 \times (1/2)$, el amarillo al producto $20 \times (1/3)$, y el rosa al producto $30 \times (1/6)$, de forma que la suma de áreas de los rectángulos (que geométricamente corresponde al área por encima de la función de distribución y por debajo de la línea horizontal cuando $t = 1$) es el valor esperado de la variable aleatoria X. Podemos observar también, en la parte derecha, los mismos rectángulos pero ahora en el gráfico de la transformación de cuantiles: ahora los rectángulos corresponden al valor esperado de la variable aleatoria Q con respecto a la distribución uniforme en $(0, 1)$.

El primer resultado es una ilustración del conocido hecho que el valor esperado de una variable aleatoria no negativa X se puede expresar como:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)\, dx = \int_0^\infty [1 - F(x)]\, dx.$$

El segundo resultado no es más que el reflejo del resultado para F a través de la tranformación dual Q. Como tanto X como Q tienen la misma distribución, se debe cumplir que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Q)$.

4 Valor esperado y transformación de cuantiles para variables aleatorias no negativas

Proposición 1. *Sea F la función de distribución de una variable aleatoria no negativa, y sea Q la correspondiente tranformación de cuantiles. Entonces se cumple:*

1. *Para toda t con $0 < t < 1$:*
$$\int_{(0,t)} Q(s)\, ds = \int_{[0,Q(t))} [t - F(x)]\, dx.$$

2. *Para toda $y \geq 0$:*
$$\int_{[0,y)} [F(y) - F(x)]\, dx = \int_{(0,F(y))} Q(s)\, ds.$$

Prueba: Primero probamos la parte 1. Tenemos:

$$\begin{aligned} t\, Q(t) &= \int_{[0,Q(t))} t\, dx \\ &= \int_{[0,Q(t))} \{F(x) + [t - F(x)]\}\, dx \\ &= \int_{[0,Q(t))} F(x)\, dx + \int_{[0,Q(t))} [t - F(x)]\, dx \\ &= \int_{[0,Q(t))} F(x)\, dx + \int_{[0,Q(t))} \int_{(F(x),t)} ds\, dx. \end{aligned}$$

Deseamos cambiar el orden de integración en la integral doble. La primera integral corresponde a x en el intervalo $0 \leq x < Q(t)$, y para cada x la segunda integral corresponde a s en el intervalo $F(x) < s < t$. Esto está bien definido, porque sabemos que $x < Q(t) \Leftrightarrow F(x) < t$. Si cambiamos el orden, empezaremos tomando s en el intervalo $0 < s < t$ y, para cada s, tomamos x en el intervalo $0 \leq x < Q(s)$. De nuevo, esto está bien definido, porque $x < Q(s) \Leftrightarrow F(x) < s$, que es lo que deseamos.

$$\begin{aligned} t\, Q(t) &= \int_{[0,Q(t))} F(x)\, dx + \int_{(0,t)} \int_{[0,Q(s))} dx\, ds \\ &= \int_{[0,Q(t))} F(x)\, dx + \int_{(0,t)} Q(s)\, ds. \end{aligned}$$

Con esto concluye la prueba de la parte 1.

Fijemos ahora $y \geq 0$. Si $F(y) = 0$, entonces ambos lados son de la igualdad son trivialmente cero, por lo que podemos suponer que se cumple $F(y) > 0$. Aplicando la igualdad 1 que acabamos de probar:

$$\int_{(0,F(y))} Q(s)\, ds = \int_{[0,Q[F(y)])} [F(y) - F(x)]\, dx.$$

Sabemos que $Q[F(y)] \leq y$. Si se cumple $y = Q[F(y)]$, entonces el resultado está demostrado. Supongamos que $Q[F(y)] < y$. Para toda x con $Q[F(y)] \leq x < y$, se cumple $F(y) \leq F\{Q[F(y)]\} \leq F(x) \leq F(y)$, de forma que $F(x) = F(y)$. Por tanto,

$$\int_{[Q[F(y)],y)} [F(y) - F(x)]\, dx = 0.$$

Lo que concluye la demostración de la parte 2. □

En particular, tomando el límite cuando $t \uparrow 1$ en ambos lados de 1, ambas integrales convergen monotónicamente.

Corolario 2. *Si X es una variable no negativa con función de distribución F, se cumple que:*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{[0,\infty)} [1 - F(x)]\, dx.$$

5 Transformación de cuantiles y dominancia estocástica de segundo orden

Sean X_A y X_B variables aleatorias no negativas. Decimos que X_A domina a X_B en el sentido de *dominancia estocástica de segundo orden* si, para cualquier $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea (débilmente) creciente y (débilmente) cóncava (y para la cual ambos valores esperados estén bien definidos), se cumple $\mathbb{E}[u(X_A)] \geq \mathbb{E}[u(X_B)]$. Rothschild y Stiglitz mostraron que eso es equivalente a que, para cualquier $y \geq 0$, se cumpla:

$$\int_0^y F_A(x)\, dx \leq \int_0^y F_B(x)\, dx.$$

El reflejo dual de esta condición para las transformaciones cuantiles implica que los rendimientos *agregados* para el porcentaje t con menores rendimientos siempre son mayores para A que para B.

Proposición 3. *La variable aleatoria no negativa X_A es superior a la variable aleatoria no negativa X_B en el sentido de dominancia estocástica de segundo orden si, y sólo si, para toda $t \in (0, 1)$:*

$$\int_0^t Q_A(s)\, ds \geq \int_0^t Q_B(s)\, ds.$$

PRUEBA: Mostremos primero que dominancia de X_A sobre X_B implica la desigualdad de las integrales de las transformaciones de cuantiles.

Dada $t \in (0, 1)$, definamos $y_A = Q_A(t)$ e $y_B = Q_B(t)$. Pueden darse dos posibilidades: $y_B < y_A$ o bien $y_A \leq y_B$.

Supongamos primero que $y_B < y_A$. Aplicando la Proposición 1 parte 1:

$$\begin{aligned}\int_0^t (Q_A - Q_B) &= \int_0^{y_A} (t - F_A) - \int_0^{y_B} (t - F_B) \\ &= \int_0^{y_B} (F_B - F_A) + \int_{y_B}^{y_A} (t - F_A)\end{aligned}$$

Como $y_A = Q_A(t)$, para $x < y_A$ se cumple $t > F_A(x)$ (ya que la tranformación de cuantiles satisface: $t > F_A(x) \iff Q_A(t) > x$). Por tanto, el segundo término de la derecha es no negativo, mientras que el primer término es no negativo por el resultado de Rothschild-Stiglitz. Con eso podemos concluir que, en este caso se cumple la desigualdad de la integral de transformaciones de cuantiles.

Supongamos ahora que $y_A \leq y_B$. Entonces:

$$\int_0^t (Q_A - Q_B) = \int_0^{y_A} (F_B - F_A) + \int_{y_A}^{y_B} (F_B - t)$$

Como $y_A = Q_A(t)$, para $y_A < x$ se cumplirá $t \leq F_A(x)$, de forma que $F_B(x) - t \geq F_B(x) - F_A(x)$. Por lo tanto,

$$\int_0^t (Q_A - Q_B) \geq \int_0^{y_a} (F_B - F_A) + \int_{y_a}^{y_b} (F_B - F_A) = \int_0^{y_b} (F_B - F_A)$$

Esto prueba la desigualdad de la integral de transformaciones de cuantiles en el presente caso.

Supongamos a continuación que se cumple la desigualdad de las integrales de transformaciones de cuantiles, y mostremos que ello implica la desigualdad de integrales de funciones de distribución.

Sea $y > 0$, y definamos $t_A = F_A(y)$ y $t_B = F_B(y)$. Pueden darse dos casos: $t_A \leq t_B$ y $t_B < t_A$.

Supongamos que $t_a \leq t_b$. Apliquemos la Proposición 1 parte 2:

$$\begin{aligned}
\int_0^y (F_B - F_A) &= \int_0^y (t_A - F_A) - \int_0^y (t_B - F_B) + \int_0^y (t_B - t_A) \\
&= \int_0^y (t_A - F_A) - \int_0^y (t_B - F_B) + (t_B - t_A)\, y \\
&= \int_0^{t_A} Q_A - \int_0^{t_B} Q_B + \int_{t_A}^{t_B} y \\
&= \int_0^{t_A} (Q_A - Q_B) + \int_{t_A}^{t_B} (y - Q_B).
\end{aligned}$$

Pero $t \leq t_B$ implica $t \leq F_B(y)$, de forma que $Q_B(t) \leq y$. Por tanto, los dos términos en la derecha son no negativos, lo que prueba la desigualdad de funciones de distribución.

Supongamos ahora que $t_B < t_A$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\int_0^y (F_B - F_A) &= \int_0^y (t_A - F_A) - \int_0^y (t_B - F_B) - \int_0^y (t_A - t_B) \\
&= \int_0^{t_A} Q_A - \int_0^{t_B} Q_B - \int_{t_B}^{t_A} y \\
&= \int_0^{t_B} (Q_A - Q_B) + \int_{t_B}^{t_A} (Q_A - y).
\end{aligned}$$

Pero $t_B = F_B(y) < t$ implica $y < Q_B(t)$, lo cual a su vez implica $Q_A(t) - y > Q_A(t) - Q_B(t)$, así que:

$$\int_0^y (F_B - F_A) \geq \int_0^{t_B} (Q_A - Q_B) + \int_{t_B}^{t_A} (Q_A - Q_B) = \int_0^{t_A} (Q_A - Q_B).$$

De modo que de nuevo se confirma la desigualdad de la funciones de distribución. $\square$