Instituto Tecnológico Autónomo de México
Maestría en Finanzas
Economía Financiera (Eco-44105), 2015
Dominancia estocástica

Ricard Torres

Índice general

1 Introducción: dominación estado a estado

El objetivo de la dominancia estocástica es la introducción de criterios de *clasificación de variables aleatorias* (que, recordemos, representan, por ejemplo, activos financieros). En general, la idea es poder afirmar que, para una determinada *clase de individuos*, una variable aleatoria es preferida a otra. Según como definamos esas clases de individuos obtendremos uno u otro criterio (dominancia de primer o de segundo orden).

Supongamos inicialmente que estamos considerando variables aleatorias definidas en un espacio de estados dado Ω, con función de probabilidad $\mathbb{P}$. Fijemos dos variables aleatorias $X : \Omega \to \mathbb{R}$ e $Y : \Omega \to \mathbb{R}$. En primer lugar consideraremos una ordenación que sólamente tiene en cuenta el nivel de *rendimiento* de las variables aleatorias, y más tarde introduciremos otro criterio que además tiene en cuenta el *riesgo*.

De acuerdo al criterio exclusivamente basado en el rendimiento, una forma de ordenación natural consiste en exigir que X domine a Y si se cumple que, para todo estado $\omega \in \Omega$, la primera da siempre rendimientos superiores:

$$X(\omega) \geq Y(\omega), \quad \text{para todo } \omega \in \Omega.$$

Este criterio se denomina ***dominación estado a estado*** (en inglés, *statewise dominance*). En principio no hay ningún problema con el mismo, salvo que, al ser tan exigente, sólamente va a permitir clasificar un número extremadamente reducido de variables aleatorias.

Una vez tenemos esta definición, nos interesa poder identificar aquella clase de individuos para los que el hecho que X domine a Y estado a estado implica que X es preferida a Y. Por "individuos" entendemos preferencias sobre variables aleatorias que son representables mediante el valor esperado de una determinada función de utilidad de Bernoulli. Por tanto, son las propiedades de la función de utilidad de Bernoulli las que permiten distinguir distintos tipos de preferencias. En el caso de la dominación estado a estado, cualquier función de utilidad de Bernoulli que sea *débilmente creciente* con respecto a la riqueza implicará que X es preferida a Y, es decir, que se cumple:

$$\mathbb{E}\{u(X)\} \geq \mathbb{E}\{u(Y)\}.$$

Idealmente, desearíamos que la implicación opuesta fuera también cierta, es decir, que si el valor esperado de cualquier función de utilidad de Bernoulli que sea débilmente creciente es mayor para X que para Y, entonces debe haber dominación estado a estado. Sin embargo, esto está lejos de ser cierto, y el motivo es muy simple: la utilidad esperada de una variable aleatoria depende del valor que ésta toma en distintos estados sólamente en la medida en que eso altere la *distribución inducida* por dicha variable aleatoria sobre niveles de riqueza. En otras palabras, dos variables aleatorias que induzcan la misma distribución sobre niveles de riqueza tienen la misma utilidad esperada, sin importar ni tan siquiera si están definidas sobre el mismo conjunto de estados de la naturaleza.

Demos un simple ejemplo para ilustrar este extremo. Supongamos que $\Omega = (0, 1]$ y $\mathbb{P}$ la distribución uniforme. Las variables aleatorias están definidas por:

$$X(\omega) = \begin{cases} 2, & \text{si } \omega \leq 1/2; \\ 0, & \text{si } \omega > 1/2. \end{cases} \qquad Y(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \leq 1/2; \\ 0, & \text{si } \omega > 1/2. \end{cases}$$

Entonces $X(\omega) \geq Y(\omega)$ para todo $\omega \in (0, 1]$: hay dominación estado a estado entre ambas variables. Consideremos ahora la variable aleatoria Z definida por:

$$Z(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } \omega \leq 1/2; \\ 2, & \text{si } \omega > 1/2. \end{cases}$$

Notemos que, si $\omega \leq 1/2$, se cumple $Z(\omega) < Y(\omega)$, mientras que la desigualdad opuesta es cierta para $\omega > 1/2$. Por tanto, no hay dominación estado a estado entre ambas variables aleatorias. Sin embargo, tanto X como Z inducen la misma distribución sobre niveles de riqueza: toman los valores $(0, 2)$ con probabilidades respectivas $(1/2, 1/2)$. Por ello, su utilidad esperada es exactamente igual:

$$\mathbb{E}[u(X)] = \frac{1}{2}\,u(2) + \frac{1}{2}\,u(0) = \frac{1}{2}\,u(0) + \frac{1}{2}\,u(2) = \mathbb{E}[u(Z)].$$

Por este motivo, el hecho que $\mathbb{E}[u(X)] \geq \mathbb{E}[u(Y)]$ para toda $u(\cdot)$ creciente implica que $\mathbb{E}[u(Z)] \geq \mathbb{E}[u(Y)]$ para las mismas utilidades, y por tanto cualquier individuo con una $u(\cdot)$ creciente prefiere también Z a Y, a pesar de no haber dominación estado a estado.

Esto motiva extender la definición de dominación estado a estado a todas aquellas variables aleatorias que tengan una utilidad esperada superior para funciones de utilidad creciente. Éste es precisamente el concepto de dominancia estocástica de primer orden.

2 Dominancia estocástica de primer orden

Definición 1. Decimos que X domina a Y en el sentido de ***dominancia estocástica de primer orden***, escrito $X \succcurlyeq_1 Y$, si, para cualquier función de utilidad de Bernoulli $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea débilmente creciente, se cumple que la utilidad esperada de X es superior a la de Y: $\mathbb{E}[u(X)] \geq \mathbb{E}[u(Y)]$. La dominación es ***estricta*** si hay alguna función de utilidad para la que la anterior desigualdad es estricta. $\Diamond$

Si quisiéramos ser formales, deberíamos especificar en la definición anterior que la desigualdad entre utilidades esperadas se debe cumplir siempre que ambas utilidades esperadas estén bien definidas (ya que, en general, la esperanza es una integral que está definida como un límite que en algunos casos puede no existir).

Como la utilidad esperada depende sólamente de la distribución inducida sobre niveles de riqueza, cualesquiera dos variables aleatorias que tengan la misma distribución tendrán la misma ordenación (en particular, serán indiferentes entre sí).

Esta definición es ahora tan general, que parece difícil de usar como criterio para comprobar si hay dominación. Por este motivo, resulta útil encontrar caracterizaciones equivalentes que sean más sencillas de verificar.

Supongamos que $X \succcurlyeq_1 Y$. Dado un número $z \in \mathbb{R}$, sea $u_z(\cdot)$ la función de utilidad de Bernoulli débilmente creciente definida por:

$$u_z(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq z; \\ 1, & \text{si } x > z. \end{cases}$$

Entonces $\mathbb{E}[u_z(X)] = \mathbb{P}(X > z) = 1 - F_X(z)$. Análogamente, $\mathbb{E}[u_z(Y)] = \mathbb{P}(Y > z) = 1 - F_Y(z)$. Recordemos que la función de distribución de X es definida como $F_X(z) = \mathbb{P}(X \leq z)$, y del hecho que $\mathbb{P}(X \leq z) + \mathbb{P}(X > z) = 1$ deducimos que $\mathbb{P}(X > z) = 1 - \mathbb{P}(X \leq z) = 1 - F_X(z)$. Por tanto, se debe cumplir que $1 - F_X(z) \geq 1 - F_Y(z)$, es decir, $F_X(z) \leq F_Y(z)$. Repitiendo el mismo ejercicio para todo $z \in \mathbb{R}$, vemos que $X \succcurlyeq_1 Y$ implica que, para cualquier $z \in \mathbb{R}$, se cumple $F_X(z) \leq F_Y(z)$.

Supongamos ahora que X e Y son dos variables aleatorias *con soporte finito* que satisfacen: para cualquier $z \in \mathbb{R}$, se cumple $F_X(z) \leq F_Y(z)$. Hay un conjunto finito de números reales, $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, para el que se cumple $\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(Y \in S) = 1$; supondremos, adicionalmente, que $x_1 > x_2 > \cdots > x_{n-1} > x_n$. Definamos las probabilidades que las variables aleatorias ponen en los puntos de S como: $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ y $q_i = \mathbb{P}(Y = x_i)$, para $1 \leq i \leq n$. La desigualdad de las funciones de distribución implica las desigualdades en cadena:

$$\begin{array}{l}
p_1 \geq q_1; \qquad p_2 + p_3 + \cdots + p_n \leq q_2 + q_3 + \cdots + q_n \\
p_1 + p_2 \geq q_1 + q_2; \qquad p_3 + p_4 + \cdots + p_n \leq q_3 + q_4 + \cdots + q_n \\
\qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\
p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} \geq q_1 + q_2 + \cdots + q_n; \qquad p_n \leq q_n
\end{array}$$

Fijemos una función de utilidad débilmente creciente $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definamos $u_i = u(x_i)$, para $1 \leq i \leq n$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{u(X)\} &= u_1\, p_1 + u_2\, p_2 + \cdots + u_n\, p_n \\
&= u_1\, p_1 + (-u_2\, p_1 + u_2\, p_1) + u_2\, p_2 + \cdots + u_n\, p_n \\
&= (u_1 - u_2)\, p_1 + u_2\,(p_1 + p_2) + u_3\, p_3 + \cdots + u_n\, p_n \\
&= (u_1 - u_2)\, p_1 + (u_2 - u_3)\,(p_1 + p_2) + u_3\,(p_1 + p_2 + p_3) + u_4\, p_4 + \cdots + u_n\, p_n \\
&\qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\
&= (u_1 - u_2)\, p_1 + (u_2 - u_3)\,(p_1 + p_2) + (u_3 - u_4)\,(p_1 + p_2 + p_3) + \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots + (u_{n-1} - u_n)\,(p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}) + u_n\,(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) \\
&\geq (u_1 - u_2)\, q_1 + (u_2 - u_3)\,(q_1 + q_2) + (u_3 - u_4)\,(q_1 + q_2 + q_3) + \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots + (u_{n-1} - u_n)\,(q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-1}) + u_n\,(q_1 + q_2 + \cdots + q_n) \\
&= \mathbb{E}\{u(Y)\}.
\end{aligned}$$

Donde el hecho que $u(\cdot)$ es creciente implica que $u_k - u_{k+1} \geq 0$ para todo $k \leq n - 1$, y por tanto las desigualdades en cadena anteriores implican que hay desigualdad término a término.

El desarrollo anterior muestra que, para cualquier par de variables aleatorias con soporte finito, la desigualdad entre las funciones de distribución implica dominancia estocástica de primer orden. Mediante un paso al límite, este argumento se extiende para cualquier par de variables aleatorias cuyas utilidades esperadas están bien definidas, aunque su soporte no sea finito.

Proposición 1. *$X \succcurlyeq_1 Y$ si, y sólo si, se cumple $F_X(z) \leq F_Y(z)$ para toda $z \in \mathbb{R}$.*

En particular, podemos ver que, si se cumple $X \succcurlyeq_1 Y$ y también $Y \succcurlyeq_1 X$, entonces $F_X(z) = F_Y(z)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Corolario 1. *Se cumplen simultáneamente tanto $X \succcurlyeq_1 Y$ como $Y \succcurlyeq_1 X$ si, y sólo si, las dos variables aleatorias inducen la misma distribución sobre niveles de riqueza.*

Mostramos sin pruebas otra equivalencia que puede ser también útil. Recordemos que la notación $X' \overset{d}{\approx} X$ significa que ambas variables aleatorias inducen la misma distribución sobre niveles de riqueza.

Proposición 2. *$X \succcurlyeq_1 Y$ si, y sólo si, existen variables aleatorias $X' \overset{d}{\approx} X$, $Y' \overset{d}{\approx} Y$ y M, definidas sobre un mismo espacio de estados, tales que M toma sólamente valores no positivos y se cumple $Y' = X' + M$.*

Dada una variable aleatoria X con función de distribución F_X, recordemos que la inversa generalizada (transformación de cuantiles) de la distribución es definida como:

$$Q_X(t) = \min\{z \in \mathbb{R} : t \leq F_X(z)\}, \quad \text{para } 0 < t < 1.$$

Se cumple entonces que:

$$t \leq F_X(z) \iff Q_X(t) \leq z.$$

Esto implica inmediatamente que, definida en el espacio de estados $\Omega = (0,1)$ con distribución uniforme, la variable aleatoria Q_X tiene la misma distribución que X. Sabemos, pues, que dadas $X \succcurlyeq_1 Y$, se debe cumplir $Q_X \succcurlyeq_1 Q_Y$. Pero en realidad se cumple mucho más. La desigualdad de más arriba implica que, dadas $t \in (0,1)$ y $z \in \mathbb{R}$, $Q_X(t) \leq z$ implica $t \leq F_X(z) \leq F_Y(z)$, lo que a su vez implica $Q_Y(t) \leq z$; como esto se cumple para toda $z \in \mathbb{R}$, ello es equivalente al hecho que $Q_X(t) \geq Q_Y(t)$. Es decir, entre ambas inversas no sólamente hay dominancia estocástica, sino dominación estado a estado.

Proposición 3. *$X \succcurlyeq_1 Y$ si, y sólo si, sus inversas generalizadas cumplen $Q_X(t) \geq Q_Y(t)$ para todo $t \in (0,1)$.*

Corolario 2. *$X \succcurlyeq_1 Y$ si, y sólo si, existen variables aleatorias $X' \overset{d}{\approx} X$ e $Y' \overset{d}{\approx} Y$, definidas sobre un mismo espacio de estados Ω, que cumplen $X'(\omega) \geq Y'(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$.*

3 Dominancia estocástica de segundo orden

La dominancia estocástica de segundo orden tiene en cuenta no sólamente el rendimiento, sino también el riesgo: la clase de funciones de utilidad de Bernoulli usada es la de funciones crecientes con respecto a la riqueza y con *aversión al riesgo*.

Definición 2. Decimos que X domina a Y en el sentido de ***dominancia estocástica de segundo orden***, escrito $X \succcurlyeq_2 Y$, si, para cualquier función de utilidad de Bernoulli $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea débilmente creciente y débilmente cóncava, se cumple que la utilidad esperada de X es superior a la de Y: $\mathbb{E}[u(X)] \geq \mathbb{E}[u(Y)]$. La dominación es ***estricta*** si hay alguna función de utilidad para la que la anterior desigualdad es estricta. $\Diamond$

En este caso, hay equivalencias paralelas a las de dominancia de primer orden. Para simplificar la exposición, supondremos a partir de este momento que todas las variables aleatorias toman sólamente *valores no negativos.*

Proposición 4 (Rothschild-Stiglitz). *$X \succcurlyeq_2 Y$ si, y sólo si, para toda $z \in \mathbb{R}$ se cumple:*

$$\int_0^z F_X(x)\,dx \leq \int_0^z F_Y(x)\,dx.$$

Proposición 5. *$X \succcurlyeq_2 Y$ si, y sólo si, existen variables aleatorias $X' \overset{d}{\approx} X$, $Y' \overset{d}{\approx} Y$, Z y M, definidas sobre un mismo espacio de estados, tales que M toma sólamente valores no positivos, $\mathbb{E}\{Z|X'\} = 0$, y se cumple $Y' = X' + Z + M$.*

Una variable Z como la de arriba se denomina *difusión que preserva la media* (en inglés, *mean-preserving spread*). El significado intuitivo es que, al sumar Z a X', hay un incremento del riesgo sin que ello venga compensado con un incremento en el rendimiento, ya que éste último se mantiene exactamente igual en media.

Finalmente, recurriendo de nuevo a las transformaciones de cuantiles, podemos expresar una nueva equivalencia. La transformación de cuantiles ordena la variable aleatoria de acuerdo al nivel de rendimiento: estados inferiores corresponden a rendimientos más bajos. Vimos también que $Q_X(t) = z$ significa que la probabilidad de obtener un rendimiento igual o inferior a z es mayor o igual a t. Cuando hay un "mean preserving spread", los rendimientos *agregados* correspondientes al porcentaje t de estados con menores rendimientos pueden haber disminuido, pero nunca aumentado. Eso es lo que afirma el siguiente resultado.

Proposición 6. *$X \succcurlyeq_2 Y$ si, y sólo si, sus respectivas inversas generalizadas Q_X y Q_Y, definidas sobre el espacio de estados $\Omega = (0,1)$ con distribución uniforme, cumplen, para todo $t \in (0,1)$:*

$$\int_0^t Q_X(s)\,ds \geq \int_0^t Q_Y(s)\,ds.$$