Instituto Tecnológico Autónomo de México
Maestría en Finanzas
Economía Financiera (Eco-44105), 2015
Lista de ejercicios 10

Ricard Torres

1. Considerar una economía temporal de intercambio puro con incertidumbre. Hay un único bien de consumo y dos períodos $t \in \{0, 1\}$. Sólamente hay incertidumbre en el segundo período, donde hay dos estados de la naturaleza, a y b, que tienen probabilidades respectivas π y $1 - \pi$, donde $0 < \pi < 1$. Sean (x_i, y_i, z_i) el consumo del individuo i en el primer período, y su plan contingente de consumo en el segundo período en los estados a y b, respectivamente. Las dotaciones iniciales del individuo 1 son $(50, 100, 0)$ y las del individuo 2 son $(50, 0, 100)$ (notar que el individuo 1 tiene toda la dotación en el estado a y el individuo 2 tiene toda la dotación en el estado b). Los individuos tienen un descuento temporal β $(0 < \beta < 1)$, de modo que sus funciones de utilidad son:

$$\mathscr{U}_1(x_1, y_1, z_1) = \pi \left[\log(x_1) + \beta \log(y_1)\right] + (1 - \pi) \left[\log(x_1) + \beta \log(z_1)\right] = \log(x_1) + \beta\,\pi \log(y_1) + \beta\,(1 - \pi) \log(z_1),$$
$$\mathscr{U}_2(x_2, y_2, z_2) = \pi \left[\log(x_2) + \beta \log(y_2)\right] + (1 - \pi) \left[\log(x_2) + \beta \log(z_2)\right] = \log(x_2) + \beta\,\pi \log(y_2) + \beta\,(1 - \pi) \log(z_2).$$

(i) Hallar (todas) las tasas marginales de substitución de cada uno de los individuos, y a continuación hallar las asignaciones Pareto óptimas. (*Nota:* dichas asignaciones deben expresar, por ejemplo, y_1 y z_1 en función de x_1, además de las restricciones de recursos.)

(ii) Suponer que, en el período $t = 0$, hay un mercado para el bien de dicho período, y además dos mercados de contratos contingentes: uno para contratos que dan una unidad del bien de consumo si el estado es a y nada si el estado es b, y otro para contratos que dan una unidad del bien de consumo si el estado es b y nada si el estado es a; sean p_a y p_b los precios respectivos de ambos tipos de contratos. Normalicemos a 1 el precio del bien en el período $t = 0$. Hallar las funciones de demanda y oferta de los individuos en los respectivos mercados. Especificar cuidadosamente las condiciones para un equilibrio competitivo, y finalmente hallar los precios y asignación de equilibrio.

(iii) Mostrar que la asignación anterior es un óptimo de Pareto.

(iv) Finalmente, tomar cualquier otra asignación Pareto óptima (donde todos los consumos sean estrictamente positivos), y mostrar cómo la podemos obtener como resultado de un equilibrio competitivo para alguna reasignación de las dotaciones iniciales.

2. Considerar una economía temporal de intercambio puro con incertidumbre. Hay un único bien de consumo y dos períodos $t \in \{0, 1\}$. Sólamente hay incertidumbre en el segundo período, donde hay dos estados de la naturaleza, a y b, que tienen probabilidades respectivas π y $1 - \pi$, donde $0 < \pi < 1$. Sean (x_i, y_i, z_i) el consumo del individuo i en el primer período, y su plan contingente de consumo en el segundo período en los estados a y b, respectivamente. Las funciones de utilidad son: $\mathscr{U}_1(x_1, y_1, z_1) = \log(x_1) + \frac{1}{4} \log(y_1) + \frac{3}{4} \log(z_1)$ y $\mathscr{U}_2(x_2, y_2, z_2) = \log(x_2) + \frac{3}{4} \log(y_2) + \frac{1}{4} \log(z_2)$. Hay dos activos, caracterizados por sus rendimientos en términos de unidad del bien en cada uno de los estados: $A_1 = (80, 20)$ y $A_2 = (20, 180)$. Las dotaciones iniciales del bien en $t = 0$ de los individuos son $e_{10} = e_{20} = 50$. Las participaciones iniciales de los individuos en la propiedad de los activos son: $\beta_1 = (12/35, 22/35)$ y $\beta_2 = (23/35, 13/35)$, donde el componente $j \in \{1, 2\}$ indica la participación en el activo j. Dado el precio del bien en $t = 0$, p_0 (que podemos normalizar: $p_0 \equiv 1$), y los precios de los activos, q_1 y q_2, las variables de elección del individuo i son su demanda del bien en $t = 0$, x_i, y sus demandas de participaciones de cada activo, $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2})$.

(i) Mostrar que elecciones $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2})$ por parte del individuo i implican consumos contingentes $y_i = 80\,\alpha_{i1} + 20\,\alpha_{i2}$ y $z_i = 20\,\alpha_{i1} + 180\,\alpha_{i2}$.

(ii) Formular el problema de elección óptima de las variables $(x_1, \alpha_{11}, \alpha_{12})$ por parte del individuo 1. Hallar las condiciones de primer orden de maximización, y mostrar que dan lugar a un sistema de ecuaciones cuya resolución no es nada trivial.

(iii) Considerar un modelo con mercados contingentes completos que se corresponda con el modelo con mercados financieros que estamos analizando. En particular, hay que hacer que las dotaciones de bienes contingentes de los individuos sean equivalentes a las que se derivan de las participaciones iniciales en la propiedad de los activos de los individuos. Hallar los precios, (p_0, p_a, p_b) con $p_0 \equiv 1$, y asignación de equilibrio en el modelo con mercados contingentes completos.

(iv) Dados los precios de bienes contingentes hallados en el apartado anterior, escribir los precios de los activos (q_1, q_2) que corresponden a dichos precios. Mostrar que la asignación $(x_1, \alpha_{11}, \alpha_{12}) = (50, 3/28, 23/28)$ y $(x_2, \alpha_{21}, \alpha_{22}) = (50, 25/28, 5/28)$ corresponde a la asignación de equilibrio en el modelo con mercados contingentes, y que estos precios y asignación en el modelo con mercados financieros solucionan los problemas de maximización de los individuos y dan lugar a equilibrio en los mercados.