INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Maestría en Finanzas
Economía Financiera (Eco-44105), 2015
Lista de ejercicios 2

Ricard Torres

1. Un individuo evalúa variables aleatorias (activos financieros) de acuerdo al valor esperado de la utilidad de Bernoulli $u(x) = \sqrt{x}$, definida sobre niveles de riqueza (medidos en millones de pesos). Supongamos que su riqueza inicial consiste en (la suma de) dos variables aleatorias, X e Y. La variable X no es realmente aleatoria, pues da 15 millones de pesos con probabilidad 1. La variable Y da 1 millón con probabilidad 1/2, o bien 10 millones con probabilidad 1/2.

(i) Hallar $\mathbb{E}(X+Y)$ (el valor esperado de la riqueza del individuo), y la utilidad esperada de la riqueza del individuo: $\mathbb{E}\{u(X+Y)\}$.

(ii) Si el individuo vende el activo financiero representado por Y a cambio de una cantidad de dinero m, entonces su riqueza consistirá en X más una nueva variable aleatoria (trivial) Z que da m en todos los estados de la naturaleza. Escribir la expresión (en función de m) para la utilidad esperada del individuo si intercambia Y por la cantidad m.

(iii) Hallar aquella cantidad m^* que hace que la utilidad esperada del individuo después de la venta del activo financiero sea la misma que tenía antes de dicha venta. Interpretar m^* como el precio de reserva del activo financiero para el individuo.

2.
Un individuo tiene la función de utilidad de Bernoulli $u(x) = \sqrt{x}$. El individuo posee dos activos financieros, representados por las variables aleatorias X e Y cuya distribución conjunta y valores vienen dados en la tabla adjunta.

		Y: 2	Y: 300
X	100	1/20	7/20
X	500	9/20	3/20

Por ejemplo, la probabilidad $\mathbb{P}(X = 500, Y = 2) = 9/20$. Se pide hallar la utilidad esperada del individuo: $\mathbb{E}\{u(X+Y)\}$.

3. Berto tiene una riqueza sin riesgo de $\$M$, y valora variables aleatorias de acuerdo al valor esperado de la función de utilidad de Bernoulli $u(x) = \log(x)$ (el logaritmo natural, cuya derivada es la inversa del argumento). Ana ha retado a Berto a una apuesta acerca de si México ganará el próximo partido de futbol contra los USA. Si Berto apuesta una cantidad x, entonces Ana le pagará esa cantidad si México gana, y en caso contrario será él quien se la pague a ella.

(i) Sea λ la probabilidad que Berto estima que México tiene de ganar, y sea x la cantidad que Berto decide apostar. Hallar la utilidad esperada de Berto.

(ii) Dada la estimación λ de Berto, hallar su apuesta óptima x (ie, aquella cantidad que hace máxima su utilidad esperada).

(iii) Mostrar que, observando la apuesta x de Berto, Ana puede inferir la estimación λ que éste tiene de que México gane.

4. Un individuo tiene una propiedad que vale actualmente $M = 1225$ unidades monetarias. En caso de incendio, su propiedad pasaría a valer $R = 225$. La probabilidad que eso suceda es π, donde $0 < \pi < 1$ es un número suficientemente pequeño. Un contrato de seguro especifica la compensación a recibir en caso de siniestro, X, y el costo unitario de dicha compensación, γ. Se debe cumplir que $0 \leq X \leq 1000$, pero con esos límites el individuo puede elegir la compensación que desea contratar. El costo unitario γ es un número dado, suficientemente pequeño, que cumple $\pi \leq \gamma < 1$. Suponer que la utilidad de Bernoulli para la riqueza del individuo es $u(x) = \sqrt{x}$, de modo que la utilidad esperada de adquirir un contrato (γ, X) es:

$$\mathcal{U}(X) = \pi \sqrt{225 + (1-\gamma)\,X} + (1-\pi)\sqrt{1225 - \gamma\,X}.$$

El problema de elección óptima del individuo puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} \max_{X} \quad & \pi \sqrt{225 + (1-\gamma)\,X} + (1-\pi)\sqrt{1225 - \gamma\,X} \\ \text{s.a.} \quad & 0 \leq X \leq 1000 \end{aligned}$$

Recordar que la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ es $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.

(i) Hallar las derivadas primra y segunda de la utilidad esperada con respecto a X, $\mathcal{U}'(X)$ y $\mathcal{U}''(X)$. Mostrar que $\mathcal{U}''(X) < 0$ para toda $0 \leq X \leq 1000$, de forma que $\mathcal{U}(X)$ es una función estrictamente cóncava en X.

(ii) Hallar el valor de la derivada cuando $X = 0$, y a continuación, mostrar que $\mathcal{U}'(0) > 0$ si, y sólo si, se cumple que $\gamma < (7\pi)/(3+4\pi)$. Usando el hecho que $0 < \pi < 1$, mostrar que este valor crítico satisface $\pi < (7\pi)/(3+4\pi) < 1$ (*nota*: $7\pi = 3\pi + 4\pi$). Interpretar gráficamente $\mathcal{U}'(0)$ como la pendiente de la función $\mathcal{U}(\cdot)$ en el punto $X = 0$. Sabiendo que $\mathcal{U}$ es estrictamente cóncava, ¿qué podemos deducir de que dicha función sea estrictamente creciente en $X = 0$?

(iii) Escribir la derivada cuando $X = 1000$, $\mathcal{U}'(1000)$, y mostrar que, si $\gamma = \pi$, entonces dicha derivada es exactamente igual a cero, y si $\gamma > \pi$ entonces la derivada es estrictamente menor a cero. Sabiendo que $\mathcal{U}'(1000)$ indica la pendiente de $\mathcal{U}$ en el extremo derecho del conjunto factible, ¿qué podemos deducir de $\mathcal{U}'(1000) < 0$ en relación al problema de optimización del individuo?

(iv) Mostrar que, si $\pi < \gamma < (7\pi)/(3+4\pi)$, entonces el valor óptimo de X, X^*, cumple: $0 < X^* < 1000$. Escribir la ecuación que caracteriza X^* en este caso. Si tienen acceso a algún programa de cómputo, pueden mostrar que, cuando $\pi = 1/100$ y $\gamma = 2/100$, la solución óptima es $X^* \approx 76.246$.