Instituto Tecnológico Autónomo de México
Maestría en Finanzas

Economía Financiera (Eco-44105), 2015

Lista de ejercicios 5

Ricard Torres

1. Dada $x_m > 0$ y $\alpha > 1$, la distribución de Pareto tiene función de densidad de probabilidad $f(x) = (\alpha\, x_m^\alpha)/x^{\alpha+1}$, para $x \geq x_m$ (y 0 para $x < x_m$). Por consiguiente, su función de distribución es $F(x) = 1 - (x_m/x)^\alpha$, para $x \geq x_m$ (y 0 para $x < x_m$).

(i) Mostrar que, si la variable aleatoria X tiene una distribución de Pareto con parámetros (x_m, α), entonces su valor esperado es $\mathbb{E}(X) = (\alpha\, x_m)/(\alpha - 1)$.

(ii) Suponer que X tiene una distribución de Pareto con parámetros (x_m, α), y que Y tiene una distribución de Pareto con parámetros (y_m, β), y suponer que $1 < \beta = \alpha$ y que $0 < y_m < x_m$. Mostrar que $X \succcurlyeq_1 Y$ (X domina a Y en el sentido de dominancia estocástica de primer orden).

(iii) Suponer que X tiene una distribución de Pareto con parámetros (x_m, α), y que Y tiene una distribución de Pareto con parámetros (y_m, β), y suponer que $1 < \beta < \alpha$ y que $0 < y_m = x_m$. Mostrar que $Y \succcurlyeq_1 X$ (Y domina a X en el sentido de dominancia estocástica de primer orden).

(iv) Suponer que X tiene una distribución de Pareto con parámetros (x_m, α), y que Y tiene una distribución de Pareto con parámetros (y_m, β). Suponer que $1 < \beta < \alpha$, pero $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$, lo que quiere decir que $(\alpha\, x_m)/(\alpha - 1) = (\beta\, y_m)/(\beta - 1)$, y por tanto $y_m < x_m$. Mostrar que $X \succcurlyeq_2 Y$ (X domina a Y en el sentido de dominancia estocástica de segundo orden).

2. Considerar dos distribuciones de riqueza, A y B, dadas por:

$$n_A = (79, 62, 111, 62, 62) \qquad y_A = (376, 429, 529, 618, 742)$$
$$n_B = (211, 56, 162, 134, 167, 235, 174, 167) \qquad y_B = (109, 146, 233, 348, 428, 464, 513, 745)$$

Hallar los vértices de la curva de Lorenz en ambos casos (es decir, los punto que interpolamos linealmente para hallar la curva de Lorenz). Mostrar que, para las coordenadas de población (las F_i) que corresponden a una u otra distribución la curva de Lorenz de A queda siempre por encima de la de B.

3. Considerar la distribución de riqueza $n = (100, 100, 100)$ e $y = (200, 300, 400)$. Analizar cómo se compara con la distribución original, en el sentido de dominación de Lorenz, la nueva distribución que resulta de:

(i) Transferir 10 individuos de la categoría $y_3 = 400$ a la categoría $y_2 = 300$.

(ii) Transferir 10 individuos de la categoría $y_1 = 200$ a la categoría $y_2 = 300$.

(iii) Transferir 10 individuos de la categoría $y_1 = 200$ a la categoría $y_2 = 300$, y 10 individuos de la categoría $y_3 = 400$ a la categoría $y_2 = 300$.

(iv) Hacer que un individuo de la categoría $y_1 = 200$ dé una cantidad 10 a un individuo de la categoría $y_3 = 400$.

(v) Hacer que un individuo de la categoría $y_3 = 400$ dé una cantidad 10 a un individuo de la categoría $y_1 = 200$.

Finalmente, mostrar que, si se dobla el número de individuos en la categoría media, n_2, y todo lo demás se deja igual, la curva de Lorenz resultante es estrictamente más equitativa que la inicial. Mostrar cómo eso se puede interpretar como un reescalamiento del número de individuos seguido de una transferencia de individuos de cada una de las categorías extremas a la categoría media de forma que la riqueza total no se altera (con el segundo cambio).