Coeficientes de aversión al riesgo

Ricard Torres

ITAM

Economía Financiera, 2015

Índice

Aversión al riesgo y concavidad de la utilidad de Bernoulli

- Hemos visto que la aversión al riesgo se traduce en concavidad de la función de utilidad de Bernoulli (que está definida sobre la riqueza)
- La misma intuición gráfica sugiere que el grado de aversión al riesgo está relacionado con la curvatura de la función: si partimos de una función dada y aumentamos su curvatura, habrá un incremento en la aversión al riesgo
- Esta intuición geométrica debería tener también una traslación en términos de las derivadas de la función de utilidad

Las derivadas de la función de utilidad

- La primera derivada de la función de utilidad es la utilidad marginal, la cual nos indica la tasa de crecimiento de la utilidad al aumentar la riqueza
- En general, suponemos que la utilidad es siempre estrictamente creciente con respecto a la riqueza, y esto se traduce en: $u'(x) > 0$, para todo $x > 0$.
- La segunda derivada de la función de utilidad indica la tasa de crecimiento de la utilidad marginal: una segunda derivada negativa indica que la utilidad marginal (siendo siempre positiva) es decreciente: ésta es la propiedad de concavidad, que es equivalente a aversión al riesgo
- Algebraicamente, la concavidad de la función de utilidad se traduce en la desigualdad de Jensen, que afirma que, para cualquier variable aleatoria X:

$$\mathbb{E}[u(X)] \leq u[\mathbb{E}(X)]$$

- Pero ésta precisamente es nuestra definición de aversión al riesgo

Una posible medida de concavidad

Por tanto, si deseamos medir el grado de aversión al riesgo, una medida natural sería usar la segunda derivada para comparar dos funciones de utilidad

Definición provisional: si, para cualquier nivel de riqueza $x > 0$, se observa que $|u''(x)| \geq |w''(x)|$, entonces deduciríamos que la función de utilidad $u(\cdot)$ tiene mayor aversión al riesgo que $w(\cdot)$

(Recordemos que la segunda derivada es siempre negativa, pero a nosotros nos interesa comparar magnitudes, por eso tomamos el valor absoluto.)

Un ejemplo

Consideremos un ejemplo. Sean

$$u(x) = -e^{-x}, \quad v(x) = -\frac{1}{4}\, e^{-2x}$$

Estas funciones pueden parecer un poco raras, pero de hecho son perfectamente válidas: si $x > 0$,

$$u'(x) = e^{-x} > 0, \qquad u''(x) = -e^{-x} < 0,$$
$$v'(x) = \frac{1}{2}\, e^{-2x} > 0, \qquad v''(x) = -e^{-2x} < 0$$

Es más, para todo $x > 0$, se cumple:

$$|u''(x)| = e^{-x} > e^{-2x} = |v''(x)|,$$

puesto que $e^{-x} > e^{-2x}$ si, y sólo si, $e^{2x-x} = e^x > 1$, lo cual es cierto para toda $x > 0$, ya que $e^0 = 1$ y la función exponencial es estrictamente creciente.

La utilidad como índice

La expresión anterior parece corroborar la idoneidad de nuestra medida, pero sin embargo hay un problema

Recordemos que la utilidad es sólo un índice, que representa las propiedades de las preferencias sobre variables aleatorias.

En el caso de utilidad esperada, podemos substituir una función de utilidad por cualquier otra que preserve la ordenación de utilidades esperadas de variables aleatorias

Esto será cierto siempre que la nueva función de utilidad sea una transformación afín de la anterior: $w(x) = a + b\,v(x)$, donde a es un número real cualquiera y $b > 0$.

Problemas con nuestra medida

En nuestro ejemplo, usemos la transformación afín $w(x) = 4v(x) = -e^{-2x}$

Entonces, deberíamos poder concluir que $u(\cdot)$ tiene mayor aversión al riesgo que $w(\cdot)$, puesto que esta última implica la misma ordenación de variables aleatorias que $v(\cdot)$

Veamos:

$$|u''(x)| > |w''(x)| \Leftrightarrow e^{-x} > 4\, e^{-2x} \Leftrightarrow e^x > 4.$$

Ahora la ordenación es ambigua: la desigualdad no se cumple cuando $x \leq \log(4)$

Es más, dado cualquier $K > 0$, para la transformación afín $s(x) = K\,v(x) = -(K/4)\, e^{-2x}$, tendremos que $|u''(x)| > |w''(x)| \Leftrightarrow x > \log(K)$, cifra que puede ser arbitrariamente elevada. Por tanto, no sólamente la desigualdad deja de cumplirse en algunos casos, sino que podemos poner el umbral mínimo para que se cumpla tan alto como deseemos.

El coeficiente de aversión absoluta al riesgo

Para definir una medida de aversión al riesgo basada en la segunda derivada, pero que es invariante con respecto a transformaciones afines de la función de utilidad, Arrow y Pratt propusieron lo que se ha dado en llamar coeficiente de aversión absoluta al riesgo de una función de utilidad de Bernoulli:

$$C_A(x;u) = \frac{|u''(x)|}{u'(x)}, \quad \text{para toda } x > 0$$

Dado que suponemos que $u'(x) > 0$ para toda $x > 0$, esta normalización está bien definida (no hay división por cero), y no cambia el signo del numerador.

Es más, si $w(x) = a + b\,u(x)$ para un cierto $b > 0$, entonces $w'(x) = b\,u'(x)$ y $w''(x) = b\,u''(x)$, por lo que vemos inmediatamente que se cumple: $C_A(x;w) = C_A(x;u)$ para toda $x > 0$

Incremento del coeficiente como *concavificación*

Dada una función de utilidad $u(x)$, supongamos que obtenemos una nueva función de utilidad $w(x)$ mediante un proceso de concavificación de $u(\cdot)$.

Para ello, sea $f(t)$ una función que satisface $f'(t) > 0$ y $f''(t) < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (por tanto, $f(t)$ es una función estrictamente creciente y estrictamente cóncava).

Definamos $w(x) = f[u(x)]$, para toda $x > 0$. Aplicando la regla de la cadena y la regla de la derivada de un producto:

$$w'(x) = f'[u(x)]\,u'(x)$$
$$w''(x) = f''[u(x)]\,[u'(x)]^2 + f'[u(x)]\,u''(x)$$

Por tanto:

$$\frac{w''}{w'} = \frac{f''\,(u')^2 + f'\,u''}{f'\,u'} = \frac{f''}{f'}\,u' + \frac{u''}{u'}$$

Por lo cual, $C_A(x;w) > C_A(x;u)$

Variación de la aversión al riesgo con la riqueza

Una de las propiedades más importantes en relación al coeficiente de aversión absoluta al riesgo es cómo evoluciona conforme aumenta el nivel de riqueza del individuo

En general, se supone que lo que mejor se corresponde con la realidad es que la aversión al riesgo de un individuo sea menor cuanto mayor sea su riqueza, y por tanto que el coeficiente de aversión absoluta al riesgo sea decreciente con la riqueza ("decreasing absolute risk-aversion" o DARA)

Sin embargo, también es frecuente usar por conveniencia funciones con un coeficiente de aversión absoluta constante ("constant absolute risk-aversion" o CARA)

Funciones de utilidad CARA

Como $u''(x) < 0$, si el coeficiente de aversión absoluta al riesgo es constante e igual a $a > 0$, tenemos:

$$\frac{u''(x)}{u'(x)} = -a \;\rightarrow\; \frac{d\log[u'(x)]}{dx} = -a \;\rightarrow\; \log[u'(x)] = -ax + c$$

Podemos elegir convenientemente constantes de integración (en este caso $c = \log(a)$) debido a la propiedad de transformación afín, y concluímos que se cumple:

$$u'(x) = a\,e^{-ax} \;\rightarrow\; u(x) = -e^{-ax},$$

una clase de funciones a la que pertenecen las que usamos en nuestro ejemplo de motivación.

- Por cierto, notar que $-e^{-2x}$ tiene un coeficiente igual a 2 y $-e^{-x}$ un coeficiente igual a 1, y por tanto la última tiene menor aversión al riesgo.

Funciones DARA y IARA

La función logarítmica $u(x) = \log(x)$ satisface: $u'(x) = x^{-1}$ y $u''(x) = -x^{-2}$. Por tanto $C_A(x; u) = x^{-1}$, y esta función es DARA

Otro ejemplo es la función $v(x) = -(1+x)^{-1}$, cuyas derivadas son: $v'(x) = (1+x)^{-2}$ y $v''(x) = -2\,(1+x)^{-3}$. Por tanto $C_A(x; v) = 2\,(1+x)^{-1}$, también es DARA.

Finalmente, consideremos $w(x) = x + \log(x)$, cuyas derivadas son: $w'(x) = 1 + x^{-1}$ y $w''(x) = -x^{-2}$. Por tanto $C_A(x; w) = (x + x^2)^{-1}$, también es DARA.

Un ejemplo de función IARA son las funciones cuadráticas: dado un máximo de riqueza $M > 0$, sea $0 < x < M$ y $s(x) = Mx - (1/2)\,x^2$, con lo que $s'(x) = M - x$ y $s''(x) = -1$. Por tanto $C_A(x; s) = -(M-x)^{-1}$ es creciente con la riqueza.

- Estas funciones son usadas en análisis de media-varianza.

El coeficiente de aversión relativa al riesgo

Una variación del coeficiente de aversión absoluta al riesgo es el coeficiente de aversión *relativa* al riesgo, que se define como:

$$C_R(x; u) = x\,C_A(x; u) = \frac{x|u''(x)|}{u'(x)}, \quad \text{para toda } x > 0$$

La idea aquí, que justificaremos más adelante, es que se mide la variación del grado de aversión al riesgo en relación a variaciones proporcionales (porcentuales) en la riqueza

Eso está relacionado con la idea de la elasticidad

La elasticidad como pendiente en un gráfico logarítmico

Sea $f : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ una función definida sobre el dominio de los $x > 0$ y que toma valores estrictamente positivos $f(x) > 0$.

La elasticidad mide la tasa de cambio de la función en relación a la de la variable en términos porcentuales, de tal forma que esta medida no depende de las unidades en que expresemos las variables:

$$\varepsilon_f(x) = \lim_{\Delta(x)\to 0} \frac{\Delta[f(x)]/f(x)}{\Delta(x)/x} = \frac{df(x)}{dx}\,\frac{x}{f(x)}$$

Supongamos que representamos $f(\cdot)$ en un gráfico logarítmico, y deseamos medir la pendiente del gráfico, es decir, la derivada $d\log[f(x)]/d\log(x)$.

Hagamos un cambio de variable: $y = \log(x)$, por lo que $x = e^y$. Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d\log[f(x)]}{d\log(x)} = \frac{d\log[f(e^y)]}{dy} = \frac{f'(e^y)\,e^y}{f(e^y)} = \frac{x\,f'(x)}{f(x)} = \varepsilon_f(x).$$

La aversión relativa al riesgo como elasticidad

Dado que $u'(x) > 0$ para toda $x > 0$, consideremos la elasticidad de esta función (en valor absoluto, dado que la función es decreciente):

$$|\varepsilon_{u'}(x)| = \left|\frac{du'}{dx}\right| \frac{x}{u'(x)} = \frac{x|u''(x)|}{u'(x)} = C_R(x; u)$$

Por tanto, $C_R(\cdot; u)$ mide variaciones porcentuales en $u'(\cdot)$ en relación a variaciones porcentuales en la riqueza.

Evolución del coeficiente con la riqueza

De nuevo, estamos interesados en cómo evoluciona este coeficiente cuando la riqueza aumenta

Típicamente, muchos modelos usan funciones con aversión relativa al riesgo constante ("constant relative risk aversion" o CRRA).

Pero también se usan funciones con aversión relativa al riesgo decreciente.

Funciones CRRA

La función logarítmica $u(x) = \log(x)$ hemos visto que tiene $C_A(x; u) = x^{-1}$, por lo cual $C_R(x; u) = x\, C_A(x; u) = 1$: es una función CRRA.

En general, consideremos funciones de la forma

$$u(x) = \frac{x^{1-a} - 1}{1 - a},$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Tenemos: $u'(x) = x^{-a}$ y $u''(x) = -a x^{-a-1}$, por lo cual $C_A(x; u) = a x^{-1}$, y $C_R(x; u) = x\, C_A(x; u) = a$. También se trata de funciones CRRA.

De hecho, aplicando la regla de l'Hôpital podemos ver que $\lim_{a \to 1} u(x) = \log(x)$, por lo cual todas estas funciones pertenecen a una misma clase (de elasticidad constante)

Funciones DRRA y IRRA

Consideremos dos ejemplos que vimos anteriormente.

La función $v(x) = -(1+x)^{-1}$ tiene $C_A(x; v) = 2\,(1+x)^{-1}$, por lo que la aversión relativa es $C_R(x; v) = 2x(1+x)^{-1}$, una función creciente, ie, IRRA.

La función $w(x) = x + \log(x)$ tiene $C_A(x; w) = (x + x^2)^{-1}$,por lo que la aversión relativa es $C_R(x; w) = (1+x)^{-1}$, una función decreciente, ie, DRRA.

Finalmente, las únicas funciones que son simultáneamente CARA y CRRA lo deben ser trivialmente: la relación $C_R(x; u) = x\, C_A(x; u)$ para todo x implica que la igualdad sólamente se puede cumplir cuando $u''(x) = 0$ para todo x, es decir, $u(\cdot)$ es una función lineal (afín), ie, con neutralidad al riesgo.

Coeficientes de aversión al riesgo e inversión

Las características de los coeficientes de aversión al riesgo de distintas funciones de utilidad, determinan los patrones de inversión correspondientes.

Por ejemplo, supongamos que un individuo debe elegir colocar sus ahorros entre un activo sin riesgo con un rendimiento dado, y otro activo que tiene un rendimiento aleatorio.

Si el individuo tiene aversión absoluta al riesgo decreciente, entonces la cantidad que coloca en el activo con riesgo es creciente con su nivel de riqueza.

Si el individuo tiene aversión relativa al riesgo decreciente, entonces la proporción de su riqueza que coloca en el activo con riesgo es creciente con su nivel de riqueza.

Inversión entre un activo con riesgo y otro sin riesgo

Un individuo averso al riesgo tiene función de utilidad de Bernoulli sobre riqueza $u(x)$, con $u'(x) > 0$ y $u''(x) < 0$ para todo $x > 0$.

Su riqueza inicial, $W > 0$, la puede invertir en:

1. Un activo sin riesgo que tiene un rendimiento neto seguro $r_f > 0$
2. Un activo con riesgo, con un rendimiento neto aleatorio que puede ser igual a r_a con probabilidad π, o bien r_b con probabilidad $1 - \pi$.

Los parámetros cumplen: $0 < \pi < 1$ y $0 < r_b < r_f < r_a$.

La decisión de inversión

Llamemos α, con $0 \leq \alpha \leq 1$, la proporción de su riqueza que el individuo invierte en el activo con riesgo

- Es decir, el individuo invertirá αW en el activo con riesgo, y $(1-\alpha)W$ en el activo sin riesgo.

Entonces la riqueza final del individuo en los dos estados de la naturaleza que dan lugar a r_a y r_b es:

- $R_a(\alpha) = (1-\alpha)\,W(1+r_f) + \alpha\,W(1+r_a) = W(1+r_f) + \alpha\,W(r_a - r_f)$
- $R_b(\alpha) = (1-\alpha)\,W(1+r_f) + \alpha\,W(1+r_b) = W(1+r_f) - \alpha\,W(r_f - r_b)$

Notemos que $R_a(\alpha) > W(1+r_f) > R_b(\alpha)$, siempre que $\alpha > 0$

Sus derivadas no dependen de α y tienen signos opuestos: $R'_a(\alpha) = W(r_a - r_f) > 0$ y $R'_b(\alpha) = W(r_f - r_b) < 0$ para toda $0 \leq \alpha \leq 1$

Adicionalmente, $R_a(\alpha) \geq R_b(\alpha) > 0$ (ya que $r_b > 0$) para toda $0 \leq \alpha \leq 1$

El problema de decisión

El problema de decisión del individuo consiste en hallar aquel patrón de inversión α que maximiza la utilidad esperada de su riqueza final

Formalmente, hay que resolver el problema de maximización:

$$\max_{0 \leq \alpha \leq 1} \pi\, u[R_a(\alpha)] + (1-\pi)\, u[R_b(\alpha)],$$

donde $R_a(\alpha)$ y $R_b(\alpha)$ son las funciones que definimos anteriormente

Definamos la utilidad esperada en función de la elección α como:

$$\mathscr{U}(\alpha) = \pi\, u[R_a(\alpha)] + (1-\pi)\, u[R_b(\alpha)]$$

Concavidad del problema de decisión

La derivada de la utilidad esperada con respecto a α es:

$$\mathscr{U}'(\alpha) = \pi\, u'(R_a)\, R'_a + (1-\pi)\, u'(R_b)\, R'_b$$

Y su derivada segunda:

$$\mathscr{U}''(\alpha) = \pi\, u''(R_a)\, (R'_a)^2 + (1-\pi)\, u''(R_b)\, (R'_b)^2$$

Como $u''(x) < 0$ para todo $x > 0$, vemos que, para todo $1 \leq \alpha \leq 1$, se cumple que $\mathscr{U}''(\alpha) < 0$

Esto implica que la función $\mathscr{U}(\alpha)$ es estrictamente cóncava sobre el intervalo $0 \leq \alpha \leq 1$

- En consecuencia, cualquier solución de las condiciones de primer orden del problema de maximización determinará automáticamente un máximo global de la función

Condición para que se cumpla $\alpha > 0$

Como ya vimos en el caso de demanda de seguros, la solución óptima involucra $\alpha > 0$ si, y sólo si, se cumple $\mathscr{U}'(0) > 0$

Substituyendo: $\mathscr{U}'(0) = \pi\, u'[R_a(0)]\, R'_a + (1-\pi)\, u'[R_b(0)]\, R'_b$.

Pero $R_a(0) = R_b(0) = W(1+r_f)$. Si además substituímos las expresiones para las derivadas de la riqueza que hallamos anteriormente, obtenemos: $\mathscr{U}'(0) = W u'[W(1+r_f)] \Big[\pi\,(r_a - r_f) - (1-\pi)\,(r_f - r_b)\Big] =$
$W u'[W(1+r_f)] \Big[\pi\, r_a + (1-\pi)\, r_b - r_f\Big] > 0$

Esto se cumplirá si, y sólo si: $\pi\, r_a + (1-\pi)\, r_b > r_f$

Es decir, la condición para que el individuo óptimamente decida invertir una parte de su riqueza en el activo con riesgo es que el valor esperado del rendimiento del activo con riesgo supere al rendimiento del activo sin riesgo

- De aquí en adelante supondremos que esta condición se cumple siempre

Condición para que se cumpla $\alpha < 1$

La solución óptima involucra $\alpha < 1$ si, y sólo si, se cumple $\mathscr{U}'(1) < 0$

Haciendo las substituciones pertinentes, esto significa que se debe cumplir

$$\pi\,(r_a - r_f)\, u'[W(1+r_a)] < (1-\pi)\,(r_f - r_b)\, u'[W(1+r_b)]$$

Esto lo podemos expresar en términos de la tasa marginal de substitución entre R_a y R_b en $\alpha = 1$ y las distintas tasas de rendimiento de los activos:

$$\mathrm{TMS}(R_a, R_b) = \frac{\pi\, u'[R_a(1)]}{(1-\pi)\, u'[R_b(1)]} < \frac{r_f - r_b}{r_a - r_f}$$

- De nuevo, vamos a suponer en adelante que esta condición se cumple, ya que para hacer un análisis de sensibilidad de la solución óptima con respecto a variaciones en W no nos conviene que la solución óptima esté anclada en una esquina del conjunto factible

Caracterización de una solución interior ($0 < \alpha < 1$)

Cuando la solución es interior, la derivada de la función de utilidad será igual a cero. Simplificando los factores estrictamente positivos, esto implica:

$$\pi\,(r_a - r_f)\, u'[R_a(\alpha)] - (1-\pi)\,(r_f - r_b)\, u'[R_b(\alpha)] = 0$$

Nos interesa estudiar qué sucede con el patrón óptimo de inversión α cuando W cambia

Si el cambio es tal que la nueva solución sigue siendo interior, se cumplirá de nuevo la ecuación para los nuevos valores de W y de α.

Por tanto, esta condición de primer orden define α como función implícita de W, de tal forma que $\alpha(W)$ se ajusta para que se cumpla:

$$\varphi(W) = \pi\,(r_a - r_f)\, u'[R_a(\alpha)] - (1-\pi)\,(r_f - r_b)\, u'[R_b(\alpha)] \equiv 0,$$

para toda W dentro de un cierto intervalo para el cual la solución sigue siendo interior

Aplicación del Teorema de la Función Implícita

El hecho de que $\mathscr{U}''(\alpha) < 0$ para toda α garantiza que se cumplen las condiciones del Teorema de la Función Implícita, lo cual da fundamento a lo que sigue

Como $\varphi(W)$ es una función constante de W dentro del intervalo en consideración, su derivada debe ser cero. Es decir:

$$\varphi'(W) = \pi\,(r_a - r_f)\, u''(R_a)\, \frac{dR_a}{dW} - (1-\pi)\,(r_f - r_b)\, u''(R_b)\, \frac{dR_b}{dW} = 0,$$

donde dR_a/dW y dR_b/dW indican las respectivas derivadas totales, que toman en cuenta la dependencia $\alpha(W)$ definida por la condición de primer orden

Substituyendo las condiciones de primer orden

Podemos reescribir las condiciones de primer orden como:

$$\pi\,(r_a - r_f) = (1-\pi)\,(r_f - r_b)\,\frac{u'(R_b)}{u'(R_a)}$$

Substituyendo esto en la relación $\varphi'(W) = 0$ hallada anteriormente, obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \pi\,(r_a - r_f)\,u''(R_a)\,\frac{dR_a}{dW} - (1-\pi)\,(r_f - r_b)\,u''(R_b)\,\frac{dR_b}{dW} \\ &= (1-\pi)\,(r_f - r_b)\,\frac{u'(R_b)}{u'(R_a)}\,u''(R_a)\,\frac{dR_a}{dW} - (1-\pi)\,(r_f - r_b)\,u''(R_b)\,\frac{dR_b}{dW} \end{aligned}$$

Simplificando y reagrupando términos:

$$\frac{u''(R_a)}{u'(R_a)}\,\frac{dR_a}{dW} = \frac{u''(R_b)}{u'(R_b)}\,\frac{dR_b}{dW} \quad \rightarrow \quad C_A(R_a)\,\frac{dR_a}{dW} = C_A(R_b)\,\frac{dR_b}{dW}$$

Derivadas totales de la riqueza final

La expresión anterior depende de las derivadas totales de la riqueza final, que hallamos aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{dR_a}{dW} &= (1+r_f) + \alpha\,(r_a - r_f) + W(r_a - r_f)\,\alpha' \\ \frac{dR_b}{dW} &= (1+r_f) - \alpha\,(r_f - r_b) - W(r_f - r_b)\,\alpha' \end{aligned}$$

donde α' es la derivada de la decisión óptima de inversión con respecto a la riqueza

Por tanto, la condición $\varphi'(W) = 0$ se puede expresar como:

$$\frac{C_A(R_a)}{C_A(R_b)} = \frac{dR_b/dW}{dR_a/dW} = \frac{(1+r_f) - \alpha\,(r_f - r_b) - W(r_f - r_b)\,\alpha'}{(1+r_f) + \alpha\,(r_a - r_f) + W(r_a - r_f)\,\alpha'}$$

Aversión absoluta al riesgo decreciente e inversión óptima

Supongamos ahora que el coeficiente de aversión absoluta al riesgo decrece con la riqueza

Esto implica $C_A(R_a) \leq C_A(R_b)$, puesto que $R_a > R_b$. Por tanto $C_A(R_a)/C_A(R_b) \leq 1$, lo cual implica:

$$(1+r_f) - \alpha\,(r_f - r_b) - W(r_f - r_b)\,\alpha' \leq (1+r_f) + \alpha\,(r_a - r_f) + W(r_a - r_f)\,\alpha'$$

Que se simplifica a: $(r_a - r_b)\,(\alpha + W\alpha') \geq 0$

Pero $\alpha + W\alpha' = d(\alpha W)/dW$. Y como $r_a - r_b > 0$, podemos concluir que se cumple $d(\alpha W)/dW \geq 0$

Esto quiere decir que la cantidad óptimamente invertida en el activo con riesgo, αW, es creciente con respecto al nivel de riqueza

- Si la aversión absoluta al riesgo es constante, entonces las desigualdades son igualdades y concluímos que la cantidad invertida es constante

Aversión relativa al riesgo decreciente e inversión óptima

A partir de $C_R(x) = x\,C_A(x)$ y de las expresiones anteriores, en el caso de aversión relativa al riesgo decreciente obtenemos:

$$1 \geq \frac{C_R(R_a)}{C_R(R_b)} = \frac{R_a}{R_b}\,\frac{dR_b/dW}{dR_a/dW} = \frac{\Big[(1+r_f) + \alpha\,(r_a - r_f)\Big]\Big[(1+r_f) - \alpha\,(r_f - r_b) - W(r_f - r_b)\,\alpha'\Big]}{\Big[(1+r_f) - \alpha\,(r_f - r_b)\Big]\Big[(1+r_f) + \alpha\,(r_a - r_f) + W(r_a - r_f)\,\alpha'\Big]}$$

Sean $P = (1+r_f) + \alpha\,(r_a - r_f)$ y $Q = (1+r_f) - \alpha\,(r_f - r_b)$. Entonces: $Q[P + W(r_a - r_f)\,\alpha'] \geq P[Q - W(r_f - r_b)\,\alpha']$, que se simplifica a: $[Q(r_a - r_f) + P(r_f - r_b)]\,\alpha' \geq 0$, es decir, $\alpha' \geq 0$

La proporción óptimamente invertida en el activo con riesgo, α, es creciente con respecto al nivel de riqueza

- Si la utilidad es CRRA, la proporción es constante