Aversión al riesgo y demanda de seguros

Ricard Torres

ITAM

Economía Financiera, 2015

Índice

Mercados completos y seguros

En general, el seguro implica una transferencia de riqueza de determinados estados (en que no ocurre un siniestro) hacia otros estados (en que dicho siniestro ocurre).

En una economía idealizada con mercados contingentes completos, los seguros constituyen una propiedad de las combinaciones de consumo óptimas.

De hecho, un contrato de seguros es un ejemplo destacado de contrato contingente: el asegurado paga la prima de seguros siempre, y recibe compensación si, y sólo si, ocurre un siniestro.

Independencia y la ley de grandes números

Hay otro motivo que justifica la existencia de compañías de seguros, y que está relacionado con la esencia misma del riesgo.

Cuando los riesgos individuales son independientes entre sí, la ley de grandes números nos asegura que, conforme el número de individuos va creciendo, la proporción agregada de accidentes se va aproximando a las probabilidades individuales.

Por independencia entendemos aquí la independencia estocástica, que significa que el hecho de que un siniestro haya tenido lugar para un individuo determinado no altera la probabilidad de que el siniestro ocurra para otro individuo cualquiera.

Risk Pooling. Un ejemplo

Supongamos que la probabilidad de que durante un año haya un incendio en una casa en una localidad determinada es de un 1 por mil. Si en la localidad hay 10.000 casas y los eventos son independientes, deberíamos esperar que, en promedio, el número de incendios anuales se sitúe alrededor de 10.

Esto causa que, cuando se agregan riesgos independientes (risk pooling), las incertidumbres individuales se transforman en magnitudes colectivas con un grado de incertidumbre que disminuye con el número de individuos. Esto es lo que otorga sentido económico a la actividad aseguradora.

Cuando los riesgos no son independientes, las compañías de seguros pueden tener problemas. Posibles soluciones: instituciones públicas (e.g.: declaración de “zona de catástrofe”), o bien ampliar el ámbito geográfico (reaseguros).

Elección óptima de un seguro

Consideremos el problema de compra de seguro de incendios por parte de un individuo averso al riesgo cuyas preferencias sobre loterías son representables mediante una utilidad esperada.

Supondremos que la función de utilidad de Bernoulli del individuo es diferenciable dos veces con continuidad, y satisface: $\forall x > 0$, $u'(x) > 0$ y $u''(x) < 0$.

La riqueza total del individuo es M, y en caso de incendio su riqueza pasaría a tener el valor residual R $(0 < R < M)$, es decir, tendría una pérdida $M - R$.

La probabilidad de que haya un siniestro durante un período determinado (eg, un año) es π $(0 < \pi < 1)$.

Compensación

La compensación que el individuo recibirá en caso de incendio, X (con $0 \leq X \leq M - R$), depende del contrato de seguro que el individuo adquiera.

Sea γ (con $0 < \gamma < 1$) la prima de seguros. Esto quiere decir que el costo para el individuo de recibir una compensación X será de γX.

Con un contrato caracterizado por (γ, X), el individuo paga una cantidad γX tanto si hay incendio como si no, y recibe una compensación X en caso de siniestro.

Prima actuarialmente justa

Supondremos que la compañía de seguros es neutral hacia el riesgo: evalúa las loterías de acuerdo a su valor esperado.

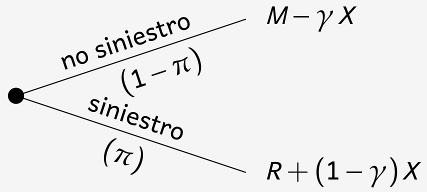
Despreciando los costos de gestión, un contrato (γ, X) supone a la compañía un ingreso γX y un costo igual al valor esperado πX.

Decimos que la prima es actuarialmente justa cuando los ingresos compensan exactamente los costos: $\gamma = \pi$.

En general, la condición de no negatividad de beneficios exige que se cumpla $\gamma \geq \pi$.

Cobertura completa y parcial

Supongamos que el individuo adquiere un contrato de seguro (γ, X).

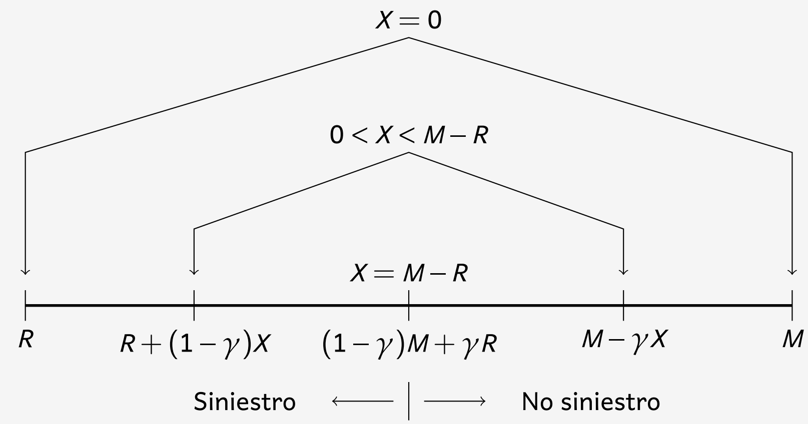


Un caso extremo es $X = 0$ (no hay contrato), en el cual la riqueza del individuo en los dos estados es (M, R).

El otro caso extremo es el de compensación máxima; cuando $X = M - R$, la riqueza en los dos estados es la misma:

$$M-\gamma(M-R) = R+(1-\gamma)(M-R) = (1-\gamma)M+\gamma R.$$

Efecto de variaciones en la compensación X



☞ La riqueza es siempre superior cuando no hay siniestro, y se va aproximando a la igualdad conforme X va aumentando hasta llegar a la compensación máxima: $X \leq M-R \iff R+(1-\gamma)X \leq M-\gamma X$.

Estados de la naturaleza y grado de cobertura

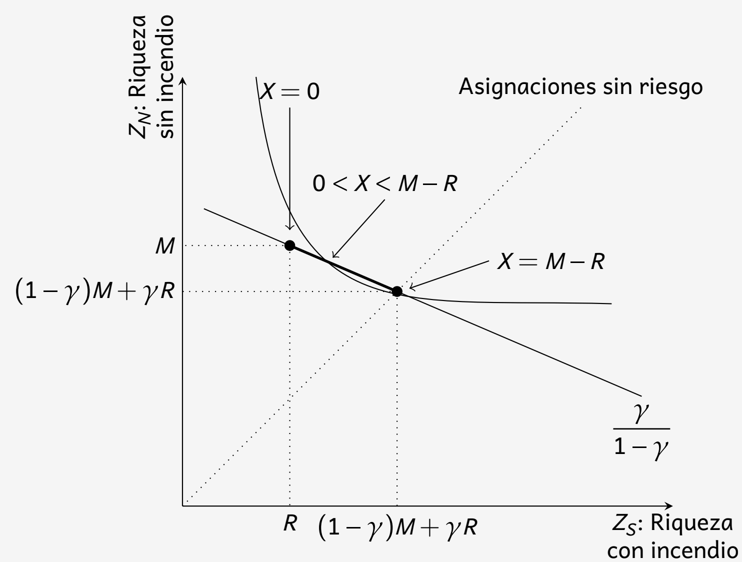
Consideremos un contrato de seguros (γ, X), donde se cumple: $\gamma \geq \pi$, $0 \leq X \leq M-R$.

Sea Z_S la riqueza cuando hay siniestro y Z_N la riqueza sin siniestro. Hemos visto que: $Z_S = R+(1-\gamma)X$, $Z_N = M-\gamma X$.

Invirtiendo la primera relación obtenemos $X = (Z_S - R)/(1-\gamma)$, y a partir de esa expresión hallamos la relación entre Z_S y Z_N:

$$Z_N = M - \frac{\gamma}{1-\gamma}(Z_S - R).$$

Cuando γ está fija, distintos grados de cobertura dan lugar a niveles de riqueza en ambos estados que se hallan sobre una recta con pendiente negativa igual a $\gamma/(1-\gamma)$.



Cobertura parcial y completa con un contrato con prima γ

☞ Notemos que, si $\gamma > \pi$, no hay tangencia para $X = M-R$.

El problema de elección óptima

Supongamos que la prima γ está dada, pero el individuo puede elegir cualquier nivel de cobertura X que satisfaga $0 \leq X \leq M - R$.

La elección óptima del individuo es la solución del siguiente problema de optimización:

$$\max_{X} \ \pi\, u[R + (1-\gamma)X] + (1-\pi)\, u[M - \gamma X]$$
$$\text{s.a.} \ \ 0 \leq X \leq M - R$$

Ignoremos por el momento las restricciones suponiendo que el máximo es interior. Entonces la condición de primer orden es la igualación de la tasa marginal de substitución a la pendiente de la recta de contratos:

$$\frac{\pi\, u'[R + (1-\gamma)X]}{(1-\pi)\, u'[M - \gamma X]} = \frac{\gamma}{1-\gamma}$$

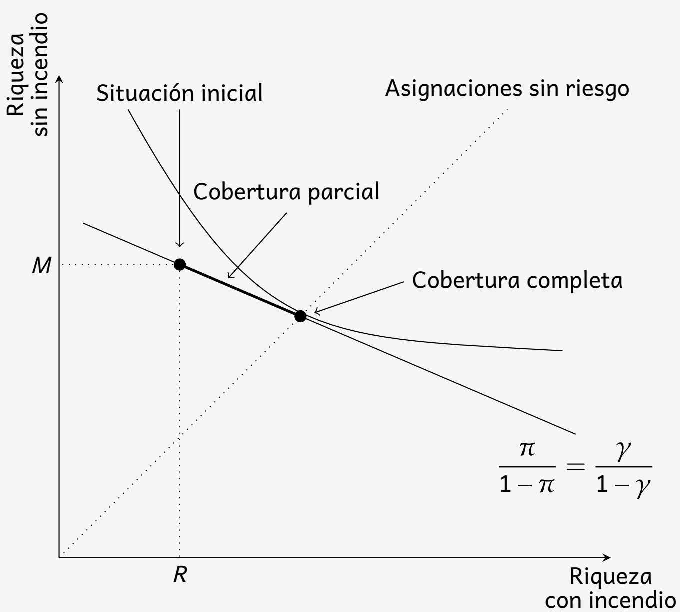
Elección con una prima actuarialmente justa

En particular, si la prima es actuarialmente justa ($\gamma = \pi$), entonces el hecho que la utilidad marginal es estrictamente decreciente implica que dicha función no puede tomar el mismo valor para dos argumentos distintos, eso es:

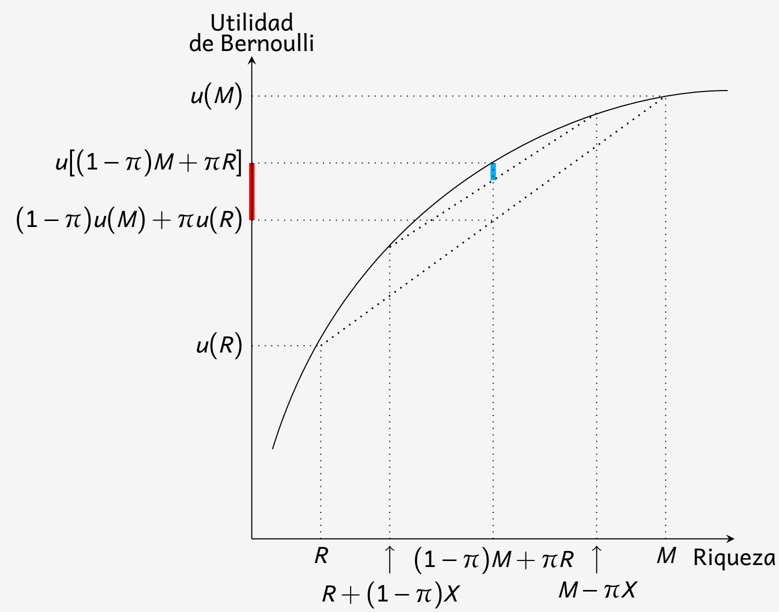
$$R + (1-\gamma)X = M - \gamma X \quad \longrightarrow \quad X = M - R$$

En conclusión: si la prima es actuarialmente justa, el individuo deseará adquirir una cobertura total de su riesgo.

Alternativamente, podemos ver el por qué de este resultado mediante una representación gráfica, ya sea en términos de estados de la naturaleza o de la función de utilidad de Bernoulli.



Cobertura parcial y completa con una prima actuarialmente justa ($\gamma = \pi$)



Utilidad de Bernoulli con una prima actuarialmente justa ($\gamma = \pi$)

Utilidades marginales y cobertura

Consideremos el ratio de utilidades marginales en ambos estados:

$$\frac{u'[R+(1-\gamma)X]}{u'(M-\gamma X)}$$

Notemos que, debido a que la utilidad marginal es estrictamente decreciente, este ratio es monótono en X. Dadas $0 < X_1 < X_2 < M-R$, tendremos:

$$\frac{u'(R)}{u'(M)} > \frac{u'[R+(1-\gamma)X_1]}{u'(M-\gamma X_1)} > \frac{u'[R+(1-\gamma)X_2]}{u'(M-\gamma X_2)} > 1 = \frac{u'[(1-\gamma)M+\gamma R]}{u'[(1-\gamma)M+\gamma R]}$$

Por tanto, lo mismo se cumple para la tasa marginal de substitución, que es el ratio anterior multiplicado por el cociente de probabilidades $\pi/(1-\pi)$.

Solución del problema de optimización

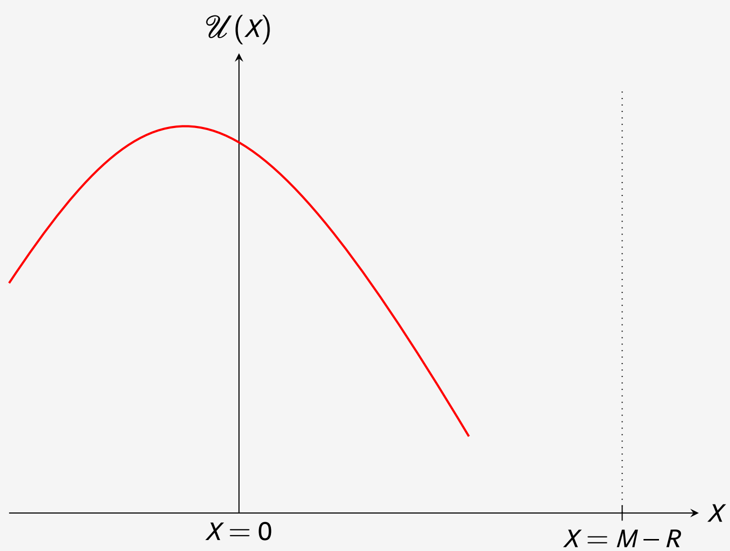
Sea $\mathscr{U}(X) = \pi\, u[Z_S(X)] + (1-\pi)\, u[Z_N(X)]$ la utilidad esperada como función de X.

Como $\mathscr{U}''(X) < 0$ para toda $0 \le X \le M-R$, esta función es estrictamente cóncava en X, y por tanto la solución de las condiciones de primer orden es un máximo global.

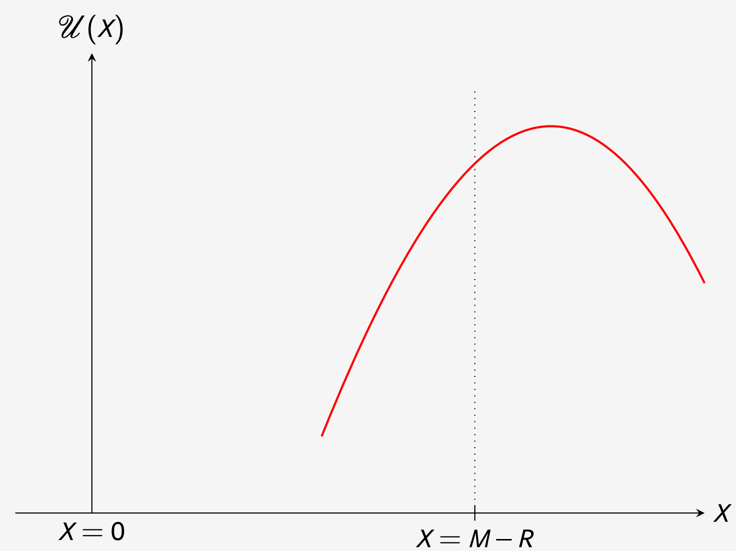
Dada la restricción $0 \le X \le M-R$ hay tres posibilidades:

1. $\mathscr{U}'(0) \le 0$ (la función es constante o decreciente en $X=0$), en cuyo caso la solución óptima es $X^* = 0$.
2. $\mathscr{U}'(M-R) \ge 0$ (la función es constante o creciente en $X = M-R$), en cuyo caso la solución óptima es $X^* = M-R$.
3. Si $\mathscr{U}'(0) > 0$ y $\mathscr{U}'(M-R) < 0$ (la función es estrictamente creciente en $X=0$ y estrictamente decreciente en $X = M-R$), entonces hay una solución óptima interior $0 < X^* < M-R$, caracterizada por la igualdad de la tasa marginal de substitución a la pendiente de la recta de contratos:

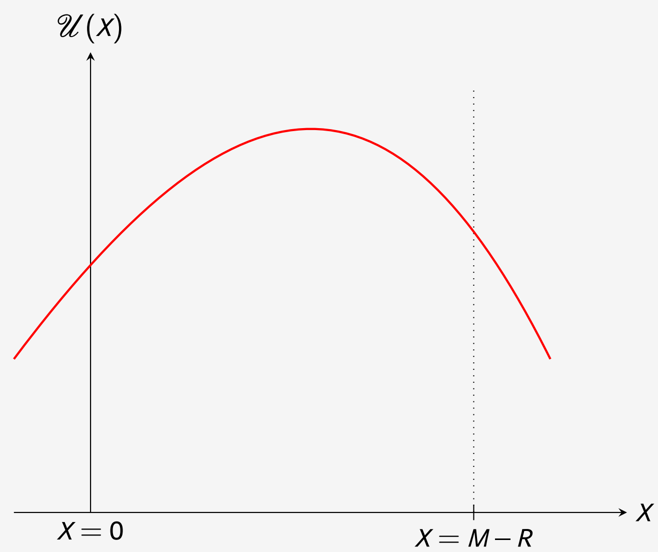
$$\frac{\pi\, u'[Z_S(X^*)]}{(1-\pi)\, u'[Z_N(X^*)]} = \frac{\gamma}{1-\gamma}$$



Caso 1: $\mathscr{U}'(X) \le 0$ cuando $X=0$



Caso 2: $\mathscr{U}'(X) \ge 0$ cuando $X = M-R$



Caso 3: $\mathscr{U}'(0)>0$ y $\mathscr{U}'(M-R)<0$: solución interior.

Cálculo de soluciones

1. La condición $\mathscr{U}'(0) \leq 0$ es equivalente a: $\dfrac{\pi\, u'(R)}{(1-\pi)\, u'(M)} \leq \dfrac{\gamma}{1-\gamma}$.
   En este caso hay solución de esquina en $X^*=0$.
2. La condición $\mathscr{U}'(M-R) \geq 0$ es equivalente a:
   $$\frac{\pi\, u'[Z_S(M-R)]}{(1-\pi)\, u'[Z_N(M-R)]} = \frac{\pi}{1-\pi} \geq \frac{\gamma}{1-\gamma},$$
   puesto que $Z_S(M-R) = Z_N(M-R)$. En este caso hay solución de esquina en $X^*=M-R$.
3. Finalmente, las condiciones $\mathscr{U}'(0)>0$ y $\mathscr{U}'(M-R)<0$ se traducen en:
   $$\frac{\pi}{1-\pi} < \frac{\gamma}{1-\gamma} < \frac{\pi\, u'(R)}{(1-\pi)\, u'(M)}.$$
   En este caso hay solución interior $0<X^*<M-R$, caracterizada por
   $$\frac{\pi\, u'[R+(1-\gamma)\,X^*]}{(1-\pi)\, u'(M-\gamma\, X^*)} = \frac{\gamma}{1-\gamma}.$$

Solución óptima: representación