Instituto Tecnológico Autónomo de México

Maestría en Finanzas

Economía Financiera (Eco-44105), 2015

Mercados de activos financieros: un ejemplo

Ricard Torres

Índice general

1 Estructura básica

En este ejemplo vamos a mostrar cómo, en una economía financiera, la estructura de activos puede causar que haya *incompletitud de mercados*, por lo cual no vamos a poder alcanzar como equilibrios todas las asignaciones que son el resultado de equilibrios en economías con mercados contingentes completos.

Hay un único bien de consumo y dos períodos $t \in \{0, 1\}$. Sólamente hay incertidumbre en el segundo período, donde hay dos estados de la naturaleza, a y b. Sea (x_i, y_i, z_i) el consumo del individuo i en el primer período, y su plan contingente de consumo en el segundo período en los estados a y b, respectivamente. Las preferencias de los individuos tienen la propiedad de la utilidad esperada pero con probabilidades subjetivas distintas para ambos estados: $\mathcal{U}_1(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{3}\,[\log(x_1)+\log(y_1)]+\frac{2}{3}\,[\log(x_1)+\log(z_1)] = \log(x_1)+\frac{1}{3}\,\log(y_1)+\frac{2}{3}\,\log(z_1)$ y $\mathcal{U}_2(x_2, y_2, z_2) = \frac{2}{3}\,[\log(x_2) + \log(y_2)] + \frac{1}{3}\,[\log(x_2) + \log(z_2)] = \log(x_2) + \frac{2}{3}\,\log(y_2) + \frac{1}{3}\,\log(z_2)$.

En lo que sigue, las dotaciones *totales* de la economía en los distintos estados serán $E = (E_0, E_a, E_b) = (200, 100, 300)$.

2 Óptimos de Pareto

Las tasas marginales de substitución del individuo 1 con respecto al bien del período 0 son:

$$\mathrm{TSM}^1_{1a,0} = \frac{\partial\mathcal{U}_1/\partial y_1}{\partial\mathcal{U}_1/\partial x_1} = \frac{1/(3y_1)}{1/x_1} = \frac{x_1}{3\,y_1}; \quad \mathrm{TSM}^1_{1b,0} = \frac{\partial\mathcal{U}_1/\partial z_1}{\partial\mathcal{U}_1/\partial x_1} = \frac{2/(3z_1)}{1/x_1} = \frac{2\,x_1}{3\,z_1}.$$

Y las del individuo 2:

$$\mathrm{TSM}^2_{1a,0} = \frac{\partial\mathcal{U}_2/\partial y_2}{\partial\mathcal{U}_2/\partial x_2} = \frac{2/(3y_2)}{1/x_2} = \frac{2\,x_2}{3\,y_2}; \quad \mathrm{TSM}^2_{1b,0} = \frac{\partial\mathcal{U}_2/\partial z_2}{\partial\mathcal{U}_2/\partial x_2} = \frac{1/(3z_2)}{1/x_2} = \frac{x_2}{3\,z_2}.$$

Para hallar los óptimos de Pareto, en primer lugar imponemos la igualación de dichas tasas marginales de substitución:

$$\mathrm{TSM}^1_{1a,0} = \mathrm{TSM}^2_{1a,0} \quad \to \quad \frac{x_1}{3\,y_1} = \frac{2\,x_2}{3\,y_2} \quad \to \quad x_1\,y_2 = 2\,x_2\,y_1;$$
$$\mathrm{TSM}^1_{1b,0} = \mathrm{TSM}^2_{1b,0} \quad \to \quad \frac{2\,x_1}{3\,z_1} = \frac{x_2}{3\,z_2} \quad \to \quad 2\,x_1\,z_2 = x_2\,z_1.$$

Como las dotaciones totales de la economía son $(200, 100, 300)$, tendremos que $x_2 = 200 - x_1$, $y_2 = 100 - y_1$ y $z_2 = 300 - z_1$. Por tanto,

$$x_1\,(100 - y_1) = 2\,(200 - x_1)\,y_1 \quad \to \quad y_1 = \frac{100\,x_1}{400 - x_1};$$
$$2\,x_1\,(300 - z_1) = (200 - x_1)\,z_1 \quad \to \quad z_1 = \frac{600\,x_1}{200 + x_1}.$$

Variando x_1 entre 0 y 200 obtenemos todas las asignaciones Pareto óptimas.

3 Mercados contingentes completos

Consideremos ahora una economía con mercados contingentes completos. Supongamos que las dotaciones iniciales de ambos individuos son: $e_1 = (e_{10}, e_{1a}, e_{1b}) = (100, 60, 120)$ y $e_2 = (e_{20}, e_{2a}, e_{2b}) = (100, 40, 180)$. Normalizaremos el precio del bien en el período 0 a $p_0 \equiv 1$, y denotaremos mediante p_a y p_b los precios de los contratos contingentes para la entrega de una unidad del bien en $t = 1$ en los estados a y b, respectivamente.

Para hallar las funciones de demanda de 1, igualaremos las tasas marginales de substitución con respecto al consumo del bien en $t = 0$ a las respectivas relaciones de precios:

$$\mathrm{TSM}^1_{1a,0} = \frac{x_1}{3\,y_1} = p_a, \quad \mathrm{TSM}^1_{1b,0} = \frac{2\,x_1}{3\,z_1} = p_b.$$

Por tanto,

$$p_a\,y_1 = \frac{1}{3}\,x_1, \quad p_b\,z_1 = \frac{2}{3}\,x_1.$$

Dada su riqueza W_1, la restricción presupuestal de 1 es: $x_1 + p_a\,y_1 + p_b\,z_1 = W_1$. Substituyendo las expresiones anteriores: $2\,x_1 = W_1$. De donde derivamos las funciones de demanda:

$$x_1 = \frac{W_1}{2}, \quad y_1 = \frac{W_1}{6\,p_a}, \quad z_1 = \frac{W_1}{3\,p_b}.$$

Donde $W_1 = 100 + 60\,p_a + 120\,p_b$.

Para hallar las funciones de demanda de 2, igualaremos las tasas marginales de substitución con respecto al consumo del bien en $t = 0$ a las respectivas relaciones de precios:

$$\mathrm{TSM}^2_{1a,0} = \frac{2\,x_2}{3\,y_2} = p_a, \quad \mathrm{TSM}^2_{1b,0} = \frac{x_2}{3\,z_2} = p_b.$$

Por tanto,

$$p_a\,y_2 = \frac{2}{3}\,x_2, \quad p_b\,z_2 = \frac{1}{3}\,x_2.$$

Dada su riqueza W_2, la restricción presupuestal de 2 es: $x_2 + p_a\,y_2 + p_b\,z_2 = W_2$. Substituyendo las expresiones anteriores: $2\,x_2 = W_2$. De donde derivamos las funciones de demanda:

$$x_2 = \frac{W_2}{2}, \quad y_2 = \frac{W_2}{3\,p_a}, \quad z_2 = \frac{W_2}{6\,p_b}.$$

Donde $W_2 = 100 + 40\,p_a + 180\,p_b$.

Para hallar los precios de equilibrio debemos igualar oferta y demanda en *dos* de los mercados (debido a la Ley de Walras):

$$\begin{aligned} 200 = x_1 + x_2 = \frac{W_1 + W_2}{2} \quad &\rightarrow \quad W_1 + W_2 = 400; \\ 100 = y_1 + y_2 = \frac{W_1 + 2W_2}{6p_a} \quad &\rightarrow \quad W_1 + 2\,W_2 = 600\,p_a. \end{aligned}$$

Substituyendo los valores de las riquezas respectivas, obtenemos:

$$\begin{aligned} 200 + 100\,p_a + 300\,p_b &= 400; \\ 300 + 140\,p_a + 480\,p_b &= 600\,p_a. \end{aligned}$$

La solución puede ser hallada fácilmente manualmente o usando software como `Matlab`: $p_a = 1$ y $p_b = 1/3$. Finalmente, hallamos la asignación de equilibrio substituyendo los precios en las funciones de demanda:

$$\begin{aligned} x_1 &= 100, & y_1 &= 100/3, & z_1 &= 200; \\ x_2 &= 100, & y_2 &= 200/3, & z_2 &= 100. \end{aligned}$$

La riqueza inicial de los individuos bajo los precios de equilibrio es

$$W_1 = (100 \times 1) + (40 \times 1) + (180 \times 1/3) = 200, \quad W_2 = (100 \times 1) + (60 \times 1) + (120 \times 1/3) = 200.$$

4 Economía financiera con mercados completos

Vamos a considerar ahora una economía financiera con un mercado para el bien 1, y un mercado para cada uno de los dos activos $A_1 = (30, 240)$ y $A_2 = (70, 60)$, donde los activos están caracterizados por el rendimiento (en términos del único bien) que dan en cada uno de los estados de la naturaleza a y b. Las dotaciones iniciales del bien en $t = 0$ son $e_{10} = 100$ para el individuo 1 y $e_{20} = 100$ para el individuo 2. Las participaciones iniciales de activos del individuo 1 son $\beta_{11} = .32$ y $\beta_{12} = .72$; por consiguiente, las del individuo 2 son $\beta_{21} = .68$ y $\beta_{22} = .28$.

La economía tiene *mercados completos* porque la matriz de rendimientos de los activos *tiene un rango igual al número de estados de la naturaleza*. En nuestro caso, como tenemos 2 estados de la naturaleza, el rango de la matriz debe ser igual a 2. Como sólo hay 2 activos, esto es equivalente a decir que dicha matriz es *invertible*, o bien que su determinante es distinto de cero:

$$\det \begin{pmatrix} 30 & 70 \\ 240 & 60 \end{pmatrix} = (30 \times 60) - (70 \times 240) = -15000 \neq 0.$$

Vamos a ver que la invertibilidad de la matriz de rendimientos equivale meramente a un *cambio de variables* entre el modelo con mercados contingentes completos y el presente modelo con activos financieros (completos).

Con mercados contingentes completos, las dotaciones del individuo i son: $e_i = (e_{i0}, e_{ia}, e_{ib})$. En el presente modelo, el individuo tendrá, al igual que antes, una dotación e_{i0} del bien en $t = 0$, pero el resto de su dotación consistirá en *participaciones iniciales* en la propiedad de los activos: β_{i1} y β_{i2}. Para transformar las participaciones en los activos en cantidades de bienes contingentes en los distintos estados, debemos usar los correspondientes rendimientos de los activos:

$$\begin{pmatrix} 30 & 70 \\ 240 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{i1} \\ \beta_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{ia} \\ e_{ib} \end{pmatrix}.$$

El hecho que la matriz de rendimientos es invertible, garantiza que hay una relación *uno-a-uno* entre participaciones en los activos y dotaciones de bien en cada estado. Para efectuar la transformación completa de un conjunto de variables en el otro debemos ampliar (trivialmente) la matriz de forma que la primera variable se corresponda a sí misma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 70 \\ 0 & 240 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{i0} \\ \beta_{i1} \\ \beta_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{i0} \\ e_{ia} \\ e_{ib} \end{pmatrix}$$

El determinante de la nueva matriz es el mismo que el de la matriz 2×2 que consideramos anteriormente, por lo cual hay una relación *uno-a-uno* entre ambos conjuntos de variables.

Las *variables de decisión* del individuo i en el modelo con mercados financieros son el consumo de bien en $t=0$, x_i, y la demanda de participaciones en los mercados de los dos activos, α_{i1} y α_{i2}. En el modelos con mercados contingentes completos, las variables de decisión son las demandas en el mercado del bien en $t=0$ y en los mercados de bienes contingentes: (x_i, y_i, z_i). La correspondencia entre ambos conjuntos de variables es similar al caso de las dotaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 70 \\ 0 & 240 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

De nuevo, el hecho que la matriz de cambio de variables es invertible garantiza que hay una relación *uno-a-uno* entre ambos conjuntos de variables. Ésta es la clave de por qué en este caso vamos a tener mercados completos: habrá una correspondencia uno-a-uno entre las asignaciones de equilibrio en el modelo con mercados contingentes y entre el modelo con mercados financieros. Para justificar esto, invocaremos la proposición acerca de cambio de variables y maximización que hay en el apéndice al presente texto. Para poder invocar dicha proposición, necesitamos que se cumpla una relación determinada entre los precios de los activos financieros en el presente modelo y los precios de los bienes contingentes en el modelo anterior. Vamos a presentar los detalles considerando un ejemplo que se corresponde con el equilibrio con mercados contingentes que hemos calculado antes. En primer lugar, necesitamos especificar dotaciones iniciales que se correspondan con las que teníamos en el otro modelo:

$$\begin{pmatrix} e_{i0} \\ \beta_{i1} \\ \beta_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 70 \\ 0 & 240 & 60 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{i0} \\ e_{ia} \\ e_{ib} \end{pmatrix}$$

Por tanto, las dotaciones-participaciones iniciales de ambos individuos deben ser (`Matlab` u `Octave` pueden ser usados para resolver los cálculos fácilmente):

$$\begin{pmatrix} e_{10} \\ \beta_{11} \\ \beta_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 70 \\ 0 & 240 & 60 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ .32 \\ .72 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_{20} \\ \beta_{21} \\ \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 70 \\ 0 & 240 & 60 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 100 \\ 40 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ .68 \\ .28 \end{pmatrix}.$$

Pasemos a considerar los problemas de maximización de los cuales derivamos las funciones de demanda de los individuos. Si denotamos mediante π_i la probabilidad subjetiva del estado a del individuo i, apliquemos el cambio de variables a la función de utilidad del individuo i:

$$\mathcal{U}_i(x_i, y_i, z_i) = \log(x_i) + \pi_i \log(y_i) + (1-\pi_i) \log(z_i) = \log(x_i) + \pi_i \log(30\,\alpha_{i1} + 70\,\alpha_{i2}) + (1-\pi_i) \log(240\,\alpha_{i1} + 60\,\alpha_{i2}).$$

La restricción del individuo i puede ser escrita como:

$$(p_0 \; p_a \; p_b) \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = (p_0 \; p_a \; p_b) \begin{pmatrix} e_{i0} \\ e_{ia} \\ e_{ib} \end{pmatrix}$$

El cambio de variables nos lleva a:

$$(p_0\ p_a\ p_b)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 30 & 70\\ 0 & 240 & 60\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_i\\ \alpha_{i1}\\ \alpha_{i2}\end{pmatrix} = (p_0\ p_a\ p_b)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 30 & 70\\ 0 & 240 & 60\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{i0}\\ \beta_{i1}\\ \beta_{i2}\end{pmatrix}$$

En el modelo con activos financieros complejos, tenemos tres mercados abiertos, uno del bien en $t=0$, con precio p_0, y uno para cada activo financiero, con precios respectivos q_1 y q_2. La restricción presupuestal en este caso es:

$$(p_0\ q_1\ q_2)\begin{pmatrix}x_i\\ \alpha_{i1}\\ \alpha_{i2}\end{pmatrix} = (p_0\ q_1\ q_2)\begin{pmatrix}e_{i0}\\ \beta_{i1}\\ \beta_{i2}\end{pmatrix}$$

Por tanto, para poder aplicar nuestra proposición acerca del cambio de variables, debe cumplirse que:

$$(p_0\ q_1\ q_2) = (p_0\ p_a\ p_b)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 30 & 70\\ 0 & 240 & 60\end{pmatrix}$$

Notemos que esta última relación no es más que un cambio de variables aplicado a los precios (variables endógenas) de ambos modelos. Suponiendo que esta relación es cierta, notemos que hay una correspondencia exacta entre la riqueza y las demandas que corresponden a un vector dado de precios: esto es consecuencia de la Proposición acerca del cambio de variables que se halla en el apéndice.

Para concluir entre la correspondencia entre los equilibrios de ambos tipos de modelos, sólamente nos resta mostrar que las condiciones de vaciado de mercados en los dos modelos son las que se derivan del cambio de variables. Las condiciones de vaciado de mercado en el modelo con mercados contingentes completos pueden ser escritas en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\\ z_1 & z_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e_{10} & e_{20}\\ e_{1a} & e_{2a}\\ e_{1b} & e_{2b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Aplicando el cambio de variables, obtenemos:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 30 & 70\\ 0 & 240 & 60\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ \alpha_{11} & \alpha_{21}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 30 & 70\\ 0 & 240 & 60\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{10} & e_{20}\\ \beta_{11} & \beta_{21}\\ \beta_{12} & \beta_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Pero como la matriz de rendimientos de los activos es invertible, premultiplicamos ambos lados de la ecuación por la inversa y obtenemos las condiciones de vaciado de mercados en el modelo con activos financieros:

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ \alpha_{11} & \alpha_{21}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e_{10} & e_{20}\\ \beta_{11} & \beta_{21}\\ \beta_{12} & \beta_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Esto concluye la prueba que hay una correspondencia exacta entre los equilibrios de ambos modelos que resulta de aplicar el cambio de variables, y que los precios correspondientes deben satisfacer la condición de cambio de variables que hemos expuesto más arriba.

En el ejemplo que nos ocupa, los precios de equilibrio en los mercados contingentes son $(p_0, p_a, p_b) = (1, 1, 1/3)$, por lo que los precios de equilibrio en los mercados financieros serán:

$$(p_0\quad q_1\quad q_2) = (1\quad 1\quad 1/3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 30 & 70\\ 0 & 240 & 60\end{pmatrix} = (1\quad 110\quad 90).$$

La asignación de equilibrio con mercados contingentes es:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100/3 & 200/3 \\ 200 & 100 \end{pmatrix}$$

La correspondiente asignación de equilibrio con mercados financieros será:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 70 \\ 0 & 240 & 60 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100/3 & 200/3 \\ 200 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 4/5 & 1/5 \\ 2/15 & 13/15 \end{pmatrix}.$$

Naturalmente, si partimos de un equilibrio en el modelo con mercados financieros hallaríamos un equilibrio en el modelo con mercados contingentes aplicando el cambio de variables inverso.

5 Economía financiera con mercados incompletos

Supongamos que tenemos una economía financiera con un único activo. Como deseamos que las dotaciones iniciales en términos de los distintos bienes de consumo de dicha economía se correspondan con las de los casos anteriores, el activo deberá ser $A = (100, 300)$.

Podemos ver de inmediato que no van a existir participaciones iniciales β_1 y $\beta_2 = 1 - \beta_1$ que correspondan a cualesquiera dotaciones iniciales e^1 y e^2. Por ejemplo, las dotaciones iniciales que hemos usado antes, $e_1 = (100, 60, 120)$ y $e_2 = (100, 40, 180)$ no se pueden conseguir, ya que no hay soluciones para las siguientes ecuaciones:

$$100\,\beta_1 = 60, \quad 300\,\beta_1 = 120, \quad 100\,\beta_2 = 40, \quad 300\,\beta_2 = 180.$$

Tampoco existen demandas del activo α_1 y $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ que puedan generar la asignación de equilibrio anterior:

$$100\,\alpha_1 = 100/3, \quad 300\,\alpha_1 = 200, \quad 100\,\alpha_2 = 200/3, \quad 300\,\alpha_2 = 100.$$

De hecho, vemos que, con este activo, los consumos de los individuos deben satisfacer:

$$\begin{aligned} y_1 &= 100\,\alpha_1, \quad z_1 = 300\,\alpha_1; \quad \text{es decir: } z_1 = 3\,y_1. \\ y_2 &= 100\,\alpha_2, \quad z_2 = 300\,\alpha_2; \quad \text{es decir: } z_2 = 3\,y_2. \end{aligned}$$

Pero las asignaciones óptimas de Pareto que satisfacen estas condiciones son sólamente las triviales en que un individuo obtiene todo y el otro nada:

$$\frac{600x_1}{200 + x_1} = z_1 = 3\,y_1 = \frac{300x_1}{400 - x_1} \quad \to \quad 2\,x_1\,(400 - x_1) = x_1\,(200 + x_1) \quad \to \quad x_1 \in \{0, 200\}.$$

Por tanto, en esta economía financiera con un único activo los únicos equilibrios que coinciden con los de mercados contingentes completos son aquellos equilibrios en que un individuo tiene como dotaciones iniciales todos los recursos de la economía.

El mismo problema se da si tenemos más de un activo, pero son linealmente dependientes. Por ejemplo, si los activos son $A_1 = (75, 225)$ y $A_2 = (25, 75)$.

A Apéndice: Cambio de variables y optimización

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, y sean $f : D \to \mathbb{R}$ y $g : D \to \mathbb{R}^m$ funciones, con $1 \leq m < n$. Consideremos el problema de maximización con restricciones (no importa que haya o no restricciones, ni que éstas sean de igualdad o desigualdad, como se puede ver adaptando el argumento que sigue):

$$\begin{aligned} \max_{x} \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & g(x) = 0 \end{aligned}$$

Supongamos que $x^* \in D$ satisface $g(x^*) = 0$ y además $f(x^*) \geq f(x)$ para todo $x \in D$ que cumple $g(x) = 0$. Es decir, supongamos que x^* es solución del anterior problema de maximización.

Dado $E \subset \mathbb{R}^n$, sea $h : E \to D$ una función biyectiva (ie, tanto inyectiva o *one-to-one*, como exhaustiva u *onto*). Es decir, para cada $x \in D$, existe un, y sólamente un, elemento $y \in E$ tal que $x = h(y)$.

En particular, sea $y^* \in E$ el elemento que satisface $h(y^*) = x^*$. Notemos que y^* satisface: $g[h(y^*)] = g(x^*) = 0$.

Fijemos un elemento arbitrario $y \in E$ que satisface $g[h(y)] = 0$. Sea $x = h(y)$, de modo que $g(x) = 0$. Como x^* es solución del problema de maximización anterior, tendremos:

$$f\left[h(y^*)\right] = f(x^*) \geq f(x) = f\left[h(y)\right].$$

Como y era un elemento arbitrario, acabamos de mostrar que y^* es solución del problema de maximización:

$$\begin{aligned} \max_{y} \quad & f\left[h(y)\right] \\ \text{s.a.} \quad & g[h(y)] = 0 \end{aligned}$$

Es más, notemos que el mismo resultado se aplica a la función biyectiva $h^{-1} : D \to E$. Por tanto, si hemos identificado en primer lugar una solución y^* al segundo problema, sabemos que $h(y^*) = x^*$ es necesariamente solución al primero. En resumen, adaptando el argumento dado aquí al caso general, se muestra la validez del siguiente resultado.

Proposición. (Cambio de Variables) Dados $A \subset D \subset \mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}$, consideremos el problema **1**: $\max\{f(x) : x \in A\}$. Dado $E \subset \mathbb{R}^n$, sea $h : E \to D$ una función biyectiva, y consideremos el problema **2**: $\max\{f[h(y)] : h(y) \in A\}$. Entonces, y^* es solución del problema **2** si, y sólo si, $x^* \equiv h(y^*)$ es solución del problema **1**.

Ejemplo: Consideremos un ejemplo unidimensional sin restricciones: $A = D = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ y $f(x) = 1 - (x-1)^2$. El problema de maximización es:

$$\max_{x \in \mathbb{R}_+} \; 1 - (x-1)^2$$

Como $(x-1)^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$, sabemos que $f(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$. Y como $f(x) = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = x^* = 1$, sabemos que ésta es la única solución del problema anterior.

Dada $E = D = \mathbb{R}_+$, sea $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por $h(y) = e^y - 1$. Claramente se trata de una función biyectiva (es estrictamente creciente), con inversa $y = h^{-1}(x) = \log(1+x)$. En particular, si $y^* = \log(2)$, tenemos $h(y^*) = e^{\log(2)} - 1 = 2 - 1 = 1 = x^*$.

Definamos $\phi(y) = f\left[h(y)\right] = 1 - \left(e^y - 2\right)^2$. Como $(e^y - 2)^2 \geq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}_+$, tenemos que $\phi(y) \leq 1$ para todo $y \in \mathbb{R}_+$. Y como $\phi(y) = 1 \Leftrightarrow \left(e^y - 2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow y = y^* = \log(2)$, sabemos que ésta es la única solución del problema anterior. Pero, en lugar de hacer de nuevo este razonamiento, nos bastaba con haber aplicado la Proposición anterior, que garantiza que y^* *debe ser* la única solución del problema.