Instituto Tecnológico Autónomo de México
Maestría en Finanzas
Economía Financiera (Eco-44105), 2015
Equilibrio de Nash

Ricard Torres

1. Juegos en forma estratégica

Tomemos como punto de partida un ***juego en forma estratégica***. Para describirlo, necesitamos especificar tres elementos:

① Los ***jugadores*** que participan en el juego.

② Las ***estrategias*** disponibles a cada jugador.

③ La ***utilidad*** que cada jugador obtendrá dada cada posible elección de estrategias por parte de todos los participantes.

Para juegos simples, solemos representar estos elementos en forma de tabla, como en el juego representado en la figura 1, conocido como el "juego del gallina".[1]

En notación simbólica, estos tres elementos se pueden representar de la siguiente manera:

		2	
		D_2	C_2
1	D_1	$4,4$	$1,5$
	C_1	$5,1$	$0,0$

Figura 1: El juego del "gallina".

❶ Denotaremos mediante la letra N el ***conjunto de los jugadores***. Usaremos un número para designar a cada jugador, de forma que $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

❷ Para cada jugador $i \in N$, denotaremos con la letra S_i el ***conjunto de las estrategias*** que este jugador tiene a su disposición. Sea $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, de tal manera que un cierto $s \in S$ es un ***perfil de estrategias***, una para cada jugador: $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

❸ Para cada jugador $i \in N$, y para cada perfil de estrategias $s \in S$, designamos con $u_i(s)$ la ***utilidad*** que i obtiene cuando todos eligen s.

En teoría de juegos, nos interesa expresar el resultado cuando un jugador cambia su estrategia mientras todos los demás jugadores mantienen fijas las suyas. Dado un jugador $i \in N$, denotamos con S_{-i} el conjunto de todos los perfiles de estrategias de los demás jugadores, es decir: $S_{-i} = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$. Por tanto, un cierto vector $s_{-i} \in S_{-i}$ representa un perfil de estrategias de todos los jugadores exceptuando i. En este caso, dados $t \in S_i$ y $s_{-i} \in S_{-i}$, obtenemos un perfil de estrategias (para todos los jugadores) (t, s_{-i}), y en particular podemos saber cuáles son las utilidades que los distintos jugadores tienen dado este perfil de estrategias.

2. Equilibrio de Nash en estrategias puras

✍ Decimos que un perfil de estrategias $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ es un ***equilibrio de Nash en estrategias puras*** si ningún jugador tiene incentivos a cambiar unilateralmente su estrategia. Formalmente, se debe cumplir que, para cada $i \in N$ y para cada estrategia $s_i \in S_i$:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

Otra manera de expresar el equilibrio de Nash es mediante el concepto de mejor respuesta.

[1]Dos individuos viajan en autos en direcciones opuestas sobre un mismo camino. Justo antes del encuentro, cada uno de ellos tiene dos elecciones: continuar o desviarse. Si ambos continúan chocarán, y si ambos se desvían tanto el orgullo como la integridad física están a salvo; pero si uno continúa y el otro se desvía, éste último es un "gallina" y el que ha continuado se siente triunfador.

✍ Decimos que una estrategia $r \in S_i$ es una ***mejor respuesta*** del jugador i a un perfil $s_{-i} \in S_{-i}$ si se cumple

$$u_i(r, s_{-i}) \geq u_i(t, s_{-i}), \quad \text{para cada } t \in S_i$$

☞ *Un equilibrio de Nash en estrategias puras es un perfil de estrategias tales que cada una de las mismas es mejor respuesta (del jugador respectivo) a las restantes.*

En el juego del "gallina" tenemos dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (D_1, C_2) y (C_1, D_2). Notemos que, cuando hay multiplicidad de equilibrios como en el presente caso, debe haber algún mecanismo externo o algún tipo de convención o sobreentendido que permita a los jugadores coordinarse en relación a cuál de los equilibrios van a jugar. En el juego del "gallina", si el jugador 1 piensa que están jugando el equilibrio (C_1, D_2) y 2 piensa que juegan (D_1, C_2), ¡los jugadores acabarán chocando!

En el caso de juegos puramente antagónicos (juegos de suma cero), la multiplicidad de equilibrios de Nash no da lugar a estos problemas de coordinación, ya que todos los equilibrios son *equivalentes* (dan las mismas utilidades a los jugadores) e *intercambiables* (si cada jugador elige alguna de sus estrategias de equilibrio, el resultado siempre es un equilibrio). Por ejemplo, si en un juego de suma cero con dos jugadores tanto (x_1, y_1) como (x_2, y_2) son equilibrios, entonces necesariamente (x_1, y_2) y (x_2, y_1) son también equilibrios *(intercambiabilidad)*, y todos estos equilibrios proporcionan la misma utilidad a ambos jugadores *(equivalencia)*. Pero en juegos que no son de suma cero ninguna de estas dos propiedades tiene por qué ser satisfecha, como ilustra el juego del "gallina".

3. Estrategias mixtas

El equilibrio de Nash en estrategias puras permite solucionar muchos juegos, pero fácilmente podemos encontrar ejemplos de juegos que no tienen ningún equilibrio de este tipo, como el representado en la figura 2.

No hay ningún perfil de estrategias que sean mejores respuestas mutuas: si representamos las mejores respuestas de cada jugador a las estrategias del rival, obtenemos ciclos sin fin.

Para garantizar que exista siempre una solución, debemos recurrir al concepto de estrategia mixta.

		2	
		a	b
1	A	$1, 0$	$1, 1$
	B	$0, 3$	$3, 0$

Figura 2: No hay equilibrio en estrategias puras.

✍ Una ***estrategia mixta*** del jugador $i \in N$ es una distribución de probabilidad definida sobre las estrategias puras de este jugador, S_i.

Notemos que cualquier estrategia pura r puede ser vista como un caso particular de estrategia mixta: jugamos r con probabilidad 1.

Denotamos con Σ_i el conjunto de todas las estrategias mixtas del jugador i, y con $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \cdots \times \Sigma_n$ el conjunto de todos los perfiles de estrategias mixtas. Una hipótesis implícita en esta definición es que *los jugadores eligen sus estrategias mixtas independentmente*, lo cual implica que la estrategia mixta de un jugador es independente en el sentido estocástico de la de cualquier otro jugador. Por tanto, *la probabilidad conjunta de un perfil de estrategias es el* ***producto*** *de las probabilidades de cada una de las estrategias.*

Por ejemplo, consideremos un juego de dos jugadores con dos estrategias (A y B para el primero, a y b para el segundo) per capita. Sean p y q dos números reales cualesquiera comprendidos entre 0 y 1. Supongamos que el primer jugador usa la estrategia mixta que pone probabilidad p en A (y por tanto $1 - p$ en B), y que el segundo usa la que pone probabilidad q en a (y por tanto $1 - q$

en b). La independencia implica que, por ejemplo, la probabilidad que el primero acabe jugando B y el segundo a es el producto $(1-p)\,q$.

Dado un perfil de estrategias mixtas $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, la utilidad del jugador i es su utilidad esperada (que escribiremos con mayúscula):

$$U_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \sum_{s \in S} u_i(s)\,\sigma(s),$$

donde $\sigma(s)$ representa la probabilidad conjunta del perfil de estrategias puras $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, que debido al supuesto de independencia es:

$$\sigma(s) = \sigma_1(s_1)\,\sigma_2(s_2)\,\cdots\,\sigma_n(s_n)$$

✍ Decimos que un perfil de estrategias mixtas $(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*)$ es un ***equilibrio de Nash*** si ningún jugador tiene incentivos a cambiar unilateralmente su estrategia. Formalmente, debe cumplirse que, para cada $i \in N$ y para cada estrategia mixta $\sigma_i \in \Sigma_i$,

$$U_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$$

✍ Decimos que una estrategia $\rho \in \Sigma_i$ es una ***mejor respuesta*** del jugador i a un perfil $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ si se cumple

$$U_i(\rho, \sigma_{-i}) \geq U_i(\tau, \sigma_{-i}), \quad \text{para cada } \tau \in \Sigma_i$$

☞ *Un equilibrio de Nash es un perfil de estrategias mixtas tales que cada una de las mismas es mejor respuesta (del jugador respectivo) a las restantes.*

Un resultado fundamental descubierto por Nash es:

☞ *Todo juego finito en forma estratégica tiene como mínimo un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.*

4. Cálculo de equilibrio en estrategias mixtas

El cálculo del equilibrio en estrategias mixtas se simplifica mucho si tenemos en cuenta el siguiente hecho.

☞ *Dado cualquier perfil de estrategias $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ por parte de los restantes jugadores, entre las mejores respuestas del jugador i siempre hay alguna que es una estrategia pura.*

El motivo es sencillo: la utilidad esperada que da una estrategia mixta es un valor intermedio entre las utilidades que dan las estrategias puras que tienen una probabilidad positiva de ser elegidas. En particular, siempre habrá alguna estrategia pura cuya utilidad sea el valor máximo que puede alcanzar la utilidad esperada.

Una primera consecuencia de este hecho es:

☞ *Todo equilibrio de Nash en estrategias puras es también un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.*

Una segunda consecuencia es:

☞ *Si una estrategia mixta es mejor respuesta de un jugador a un perfil de estrategias de los demás, entonces* todas *las estrategias puras que, bajo la estrategia mixta dada, son elegidas con probabilidad positiva, dan exactamente la misma utilidad al jugador.*

Usemos estos hechos para derivar un equilibrio en estrategias mixtas del juego que hemos representado en la figura 2. En primer lugar, notemos que no es posible que ninguno de los jugadores use una estrategia pura en equilibrio, ya que entonces la mejor respuesta del otro sería otra estrategia pura. Por tanto, en equilibrio ambos deberán usar estrategias mixtas. Sea p la probabilidad que 1 pone sobre A, y q la probabilidad que 2 pone sobre a.

Para que 1 esté dispuesto a jugar una $0 < p < 1$, es decir una estrategia mixta que pone probabilidad positiva tanto en A como en B, este jugador debe ser indiferente entre jugar A y B, ya que en otro caso elegiría la estrategia pura correspondiente. Por tanto:

$$q\,1 + (1-q)\,1 = q\,0 + (1-q)\,3 \quad \rightarrow \quad q = 2/3$$

Para que 2 esté dispuesto a jugar una $0 < q < 1$, es decir una estrategia mixta que pone probabilidad positiva tanto en a como en b, este jugador debe ser indiferente entre jugar a o b. Por tanto:

$$p\,0 + (1-p)\,3 = p\,1 + (1-p)\,0 \quad \rightarrow \quad p = 3/4$$

El perfil de estrategias dado por $p = 3/4$ y $q = 2/3$ es el único equilibrio de Nash de este juego.

Hay que tener en cuenta que también juegos que tienen equilibrios de Nash en estrategias puras pueden tener otros en estrategias mixtas. Por ejemplo, en el juego del "gallina" podemos comprobar (usando el método que acabamos de describir) que hay un equilibrio en que cada jugador elige entre sus estrategias con igual probabilidad. Las utilidades esperadas que corresponden a este equilibrio son $(5/2, 5/2)$.