Instituto Tecnológico Autónomo de México
Maestría en Finanzas
Economía Financiera (Eco-44105), 2015
Solución lista de ejercicios 1

Ricard Torres

1. Un consumidor tiene preferencias sobre canastas con dos bienes definidas por la función de utilidad $\mathcal{U}(c_1, c_2) = \min\{c_1, 3\,c_2\}$.

(i) Dibujar las curvas de indiferencia, y mostrar que cada curva de indiferencia tiene un vértice ("kink"). Caracterizar la relación entre c_1 y c_2 que define dicho vértice.

(ii) Razonar gráficamente que, dada cualquier recta presupuestaria, la solución del problema de maximización de utilidad siempre debe tener lugar en el vértice de una curva de indiferencia.

(iii) Usando el resultado anterior, hallar las funciones de demanda y la función indirecta de utilidad. (Solución parcial: $c_1(p, I) = 3I/(3p_1 + p_2)$.)

Solución: Los vértices se caracterizan por $c_1 = 3\,c_2$. Junto con la ecuación presupuestaria, esta ecuación nos permite hallar las funciones de demanda. Substituímos c_1:

$$p_1c_1 + p_2c_2 = 3p_1c_1 + p_2c_2 = (3p_1 + p_2)\,c_2 = I \;\rightarrow\; c_2(p, I) = \frac{I}{3p_1 + p_2}$$

De donde $c_1(p, I) = (3I)/(3p_1+p_2)$. Substituímos en la función de utilidad para hallar $v(p, I)$. Como $u = \min\{c_1, 3c_2\}$ y $c_1 = 3c_2$, tenemos:

$$v(p, I) = c_1 = \frac{3I}{3p_1 + p_2}$$

(iv) Hallar la función de gasto mínimo del consumidor invirtiendo la función indirecta de utilidad (en lugar de solucionar el problema de optimización).

Solución: Substituímos "u" por "v" y "e" por "I", y despejamos e:

$$e(p, u) = \frac{(3p_1 + p_2)\,u}{3}$$

(v) Mostrar que la función de gasto mínimo es diferenciable con respecto a precios y nivel de utilidad. Aplicando el teorema de la envolvente, hallar las funciones de demanda hicksiana a partir de la función de gasto mínimo, y mostrar que esas funciones dependen del nivel de utilidad, pero no de los precios. Justificar intuitivamente por qué podríamos haber anticipado que eso sucedería en el presente caso.

Solución: Derivando,

$$c_1^h(p, u) = \frac{\partial e}{\partial p_1} = u, \qquad c_2^h(p, u) = \frac{\partial e}{\partial p_2} = u/3.$$

El nivel de utilidad determina consumos en el vértice correspondiente, sin importar los precios.

2. Un consumidor tiene preferencias sobre canastas con dos bienes definidas por la función de utilidad $\mathcal{U}(c_1, c_2) = c_1^2\, c_2$.

(i) Resolver el problema de maximización de utilidad, y hallar las funciones de demanda (marshalliana). (Solución parcial: $c_1(p, I) = 2I/(3p_1)$.)

Solución: Hallamos las derivadas parciales de la función de utilidad con respecto a los consumos de ambos bienes:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial c_1} = 2c_1c_2 \qquad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial c_2} = c_1^2$$

Igualamos la tasa marginal de substitución a la relación de precios:

$$\text{TMS} = \frac{\partial \mathcal{U}/\partial c_1}{\partial \mathcal{U}/\partial c_2} = \frac{2c_2}{c_1} = \frac{p_1}{p_2} \;\rightarrow\; p_1c_1 = 2p_2c_2$$

Substituímos en la ecuación presupuestaria:

$$p_1c_1 + p_2c_2 = 3p_2c_2 = I \;\rightarrow\; c_2(p, I) = \frac{I}{3p_2},\; c_1(p, I) = \frac{2I}{3p_1}$$

(ii) Hallar la función indirecta de utilidad. (Solución: $v(p, I) = 4I^3/(3^3p_1^2p_2)$.)

Solución:

$$v(p, I) = c_1^2c_2 = \left(\frac{2I}{3p_1}\right)^2 \left(\frac{I}{3p_2}\right) = \frac{2^2I^3}{3^3p_1^2p_2}$$

(iii) Hallar la función de gasto mínimo del consumidor invirtiendo la función indirecta de utilidad.

Solución:

$$e(p, u) = \left(\frac{3^3p_1^2p_2u}{2^2}\right)^{1/3} = \frac{3}{2^{2/3}}\, p_1^{2/3}\, p_2^{1/3}\, u^{1/3}$$

(iv) Aplicando el teorema de la envolvente, hallar las funciones de demanda hicksiana a partir de la función de gasto mínimo. (Solución parcial: $c_1^h(p, u) = (2p_2u/p_1)^{1/3}$.)

Solución: Derivando,

$$c_1^h(p, u) = \frac{\partial e}{\partial p_1} = 2^{1/3}\, p_1^{-1/3}\, p_2^{1/3}\, u^{1/3}, \qquad c_2^h(p, u) = \frac{\partial e}{\partial p_2} = 2^{-2/3}\, p_1^{2/3}\, p_2^{-2/3}\, u^{1/3}$$

(v) Hallar ahora las funciones de demanda hicksiana solucionando el problema de minimización del gasto, y verificar que coinciden con las halladas anteriormente.

Solución: La función de utilidad es $u = c_1^2c_2$. Substituímos la expresión de c_2 que resulta de igualar $\text{TMS} = p_1/p_2$:

$$u = c_1^2\, \frac{p_1}{2p_2}\, c_1 = \frac{p_1}{2p_2}\, c_1^3 \;\rightarrow\; c_1^h(p, u) = 2^{1/3}\, p_1^{-1/3}\, p_2^{1/3}\, u^{1/3}$$

A continuación hallamos c_2 a partir de $c_2 = (p_1c_1)/(2p_2)$:

$$c_2^h(p, u) = 2^{-2/3}\, p_1^{2/3}\, p_2^{-2/3}\, u^{1/3}$$

3. Un consumidor tiene preferencias sobre canastas con dos bienes definidas por la función de utilidad $\mathscr{U}(c_1, c_2) = c_1^{1/2} + 2\,c_2^{1/2}$.

(i) A partir de la matriz (hessiana) de derivadas segundas, mostrar que la función de utilidad es estrictamente cóncava.

Solución: Derivadas parciales de orden 1:

$$\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial c_1} = \frac{1}{2}\,c_1^{-1/2} \qquad \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial c_2} = c_2^{-1/2}$$

Derivadas parciales de orden 2:

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial c_1^2} = -\frac{1}{4}\,c_1^{-3/2} \quad \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial c_2^2} = -\frac{1}{2}\,c_2^{-3/2} \quad \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial c_1 \partial c_2} = \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial c_2 \partial c_1} = 0$$

Matriz hessiana:

$$H(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial c_1^2} & \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial c_1 \partial c_2} \\ \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial c_2 \partial c_1} & \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial c_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\,c_1^{-3/2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\,c_2^{-3/2} \end{pmatrix}$$

Al ser una matriz diagonal, los elementos en la diagonal principal son los valores propios (eigenvalues), y son estrictamente negativos para todos $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$. Esto quiere decir que la función es estrictamente cóncava sobre ese dominio.

(ii) Resolver el problema de maximización de utilidad, y hallar las funciones de demanda (marshalliana). (Solución parcial: $c_1(p, I) = p_2 I / [p_1\,(4p_1 + p_2)]$.)

Solución: Igualamos la tasa marginal de substitución a la relación de precios:

$$\text{TMS} = \frac{\partial \mathscr{U}/\partial c_1}{\partial \mathscr{U}/\partial c_2} = \frac{c_2^{1/2}}{2c_1^{1/2}} = \frac{p_1}{p_2} \;\to\; c_2 = \frac{4p_1^2}{p_2^2}\,c_1$$

Substituímos en la ecuación presupuestaria:

$$p_1c_1 + p_2c_2 = p_1c_1 + \frac{4p_1^2}{p_2}\,c_1 = I \;\to\; p_1c_1\left(1 + \frac{4p_1}{p_2}\right) = \frac{p_1}{p_2}\,c_1\,(4p_1 + p_2) = I$$

De donde:

$$c_1(p, I) = \frac{p_2 I}{p_1\,(4p_1 + p_2)} \qquad c_2(p, I) = \frac{4p_1 I}{p_2\,(4p_1 + p_2)}$$

(iii) Hallar la función indirecta de utilidad. (Solución: $v(p, I) = \sqrt{I(4p_1 + p_2)/(p_1p_2)}$.)

Solución: Substituímos las funciones de demanda en la expresión $u = c_1^{1/2} + 2c_2^{1/2}$. El resto es álgebra.

(iv) Hallar la función de gasto mínimo del consumidor invirtiendo la función indirecta de utilidad.

Solución:

$$e(p, u) = \frac{p_1p_2u^2}{4p_1 + p_2}$$

(v) Aplicando el teorema de la envolvente, hallar las funciones de demanda hicksiana a partir de la función de gasto mínimo. (Solución parcial: $c_1^h(p,u) = [p_2 u/(4p_1 + p_2)]^2$.)

Solución: Derivando,

$$c_1^h(p,u) = \frac{\partial e}{\partial p_1} = u^2\,\frac{4p_1p_2 + p_2^2 - 4p_1p_2}{(4p_1+p_2)^2} = \frac{p_2^2u^2}{(4p_1+p_2)^2}$$
$$c_2^h(p,u) = \frac{\partial e}{\partial p_2} = u^2\,\frac{4p_1^2 + p_1p_2 - p_1p_2}{(4p_1+p_2)^2} = \frac{4p_1^2u^2}{(4p_1+p_2)^2}$$

(vi) Hallar ahora las funciones de demanda hicksiana solucionando el problema de minimización del gasto, y verificar que coinciden con las halladas anteriormente.

Solución: La función de utilidad es $u = c_1^{1/2} + 2c_2^{1/2}$. Substituímos la expresión de c_2 que resulta de igualar TMS $= p_1/p_2$:

$$u = c_1^{1/2} + 2\,\frac{2p_1}{p_2}\,c_1^{1/2} = c_1^{1/2}\left(1 + \frac{4p_1}{p_2}\right) = \frac{c_1^{1/2}}{p_2}\,(4p_1+p_2) \;\rightarrow\; c_1^h(p,u) = \left(\frac{p_2u}{4p_1+p_2}\right)^2$$

A continuación hallamos c_2 a partir de $c_2^{1/2} = (2p_1c_1^{1/2})/p_2$:

$$c_2^h(p,u) = \left(\frac{2p_1u}{4p_1+p_2}\right)^2$$