Instituto Tecnológico Autónomo de México
Maestría en Finanzas
Economía Financiera (Eco-44105), 2015
Solución lista de ejercicios 10

Ricard Torres

1. Considerar una economía temporal de intercambio puro con incertidumbre. Hay un único bien de consumo y dos períodos $t \in \{0, 1\}$. Sólamente hay incertidumbre en el segundo período, donde hay dos estados de la naturaleza, a y b, que tienen probabilidades respectivas π y $1 - \pi$, donde $0 < \pi < 1$. Sean (x_i, y_i, z_i) el consumo del individuo i en el primer período, y su plan contingente de consumo en el segundo período en los estados a y b, respectivamente. Las dotaciones iniciales del individuo 1 son $(50, 100, 0)$ y las del individuo 2 son $(50, 0, 100)$ (notar que el individuo 1 tiene toda la dotación en el estado a y el individuo 2 tiene toda la dotación en el estado b). Los individuos tienen un descuento temporal β $(0 < \beta < 1)$, de modo que sus funciones de utilidad son:

$$\mathcal{U}_1(x_1, y_1, z_1) = \log(x_1) + \beta\,\pi\,\log(y_1) + \beta\,(1-\pi)\,\log(z_1),$$
$$\mathcal{U}_2(x_2, y_2, z_2) = \log(x_2) + \beta\,\pi\,\log(y_2) + \beta\,(1-\pi)\,\log(z_2).$$

(i) Hallar (todas) las tasas marginales de substitución de cada uno de los individuos, y a continuación hallar las asignaciones Pareto óptimas. (*Nota:* dichas asignaciones deben expresar, por ejemplo, y_1 y z_1 en función de x_1, además de las restricciones de recursos.)

Solución: Las tasas marginales de substitución del individuo i son:

$$\mathrm{TMS}^i_{0,1a} = \frac{\partial\mathcal{U}_i/\partial y_i}{\partial\mathcal{U}_i/\partial x_i} = \frac{\beta\pi x_i}{y_i}, \qquad \mathrm{TMS}^i_{0,1b} = \frac{\partial\mathcal{U}_i/\partial z_i}{\partial\mathcal{U}_i/\partial x_i} = \frac{\beta(1-\pi)x_i}{z_i}.$$

Los recursos totales de la economía son $e = (100, 100, 100)$. La igualación de las TMS de ambos individuos lleva a:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{100 - x_1}{100 - y_1}, \qquad \frac{x_1}{z_1} = \frac{x_2}{z_2} = \frac{100 - x_1}{100 - z_1}.$$

De donde deducimos que las asignaciones Pareto óptimas satisfacen: $y_1 = x_1$, $z_1 = x_1$, para $0 \le x_1 \le 100$.

(ii) Suponer que, en el período $t = 0$, hay un mercado para el bien de dicho período, y además dos mercados de contratos contingentes: uno para contratos que dan una unidad del bien de consumo si el estado es a y nada si el estado es b, y otro para contratos que dan una unidad del bien de consumo si el estado es b y nada si el estado es a; sean p_a y p_b los precios respectivos de ambos tipos de contratos. Normalicemos a 1 el precio del bien en el período $t = 0$. Hallar las funciones de demanda y oferta de los individuos en los respectivos mercados. Especificar cuidadosamente las condiciones para un equilibrio competitivo, y finalmente hallar los precios y asignación de equilibrio.

Solución: Para hallar las funciones de demanda de i igualamos las tasas marginales de substitución a las respectivas relaciones de precios. Teniendo en cuenta la normalización $p_0 \equiv 1$, queda:

$$\frac{\beta\pi x_i}{y_i} = p_a, \qquad \frac{\beta(1-\pi)x_i}{z_i} = p_b.$$

De donde:

$$p_a\, y_i = \beta\, \pi\, x_i, \qquad p_b\, z_i = \beta\, (1-\pi)\, x_i.$$

La ecuación presupuestal de i es: $x_i + p_a\, y_i + p_b\, z_i = W_i$, donde W_i es la riqueza. Substituyendo las expresiones de más arriba nos permite finalmente hallar las funciones de demanda de i:

$$x_i = \frac{W_i}{1+\beta}, \quad y_i = \frac{\beta\, \pi\, W_i}{(1+\beta)\, p_a}, \quad z_i = \frac{\beta\, (1-\pi)\, W_i}{(1+\beta)\, p_b}$$

Debido a la Ley de Walras, para hallar los valores (p_a, p_b) que dan lugar a un equilibrio competitivo es suficiente con considerar la igualación de oferta y demanda en dos de los tres mercados. A partir de las dotaciones iniciales, substituiremos la riqueza de cada individuo por: $W_1 = 50 + 100\, p_a$ y $W_2 = 50 + 100\, p_b$. En el mercado del bien en el período 0, la condición queda:

$$100 = x_1 + x_2 = \frac{100\, (1 + p_a + p_b)}{1+\beta} \quad \rightarrow \quad p_a + p_b = \beta.$$

Para el mercado del bien contingente correspondiente al estado de la naturaleza a:

$$100 = y_1 + y_2 = \frac{100\, \beta\, \pi\, (1 + p_a + p_b)}{(1+\beta)\, p_a} \quad \rightarrow \quad (1+\beta)\, p_a = \beta\, \pi\, (1 + p_a + p_b).$$

Las dos ecuaciones anteriores tienen como solución $p_a = \beta\, \pi$ y $p_b = \beta\, (1-\pi)$, además de nuestra normalización $p_0 = 1$. Las correspondientes asignaciones son:

$$x_1 = y_1 = z_1 = \frac{1 + 2\, \beta\, \pi}{1+\beta}\, 50, \qquad x_2 = y_2 = z_2 = \frac{1 + 2\, \beta\, \pi}{1+\beta}\, 50.$$

(iii) Mostrar que la asignación anterior es un óptimo de Pareto.

Solución: La restricción de recursos es satisfecha debido al vaciado de mercados, y también se satisface: $x_1 = y_1 = z_1$, con $0 \le x_1 \le 100$, que hemos visto que caracteriza la optimalidad de Pareto.

(iv) Finalmente, tomar cualquier otra asignación Pareto óptima (donde todos los consumos sean estrictamente positivos), y mostrar cómo la podemos obtener como resultado de un equilibrio competitivo para alguna reasignación de las dotaciones iniciales.

Solución: Tomemos la asignación $x_1 = y_1 = z_1 = 20$, por lo cual $x_2 = y_2 = z_2 = 80$. Normalicemos de nuevo $p_0 = 1$. Las funciones de demanda del bien contingente en a implican:

$$y_i = \frac{\beta\, \pi\, W_i}{(1+\beta)\, p_a} = \frac{\beta\, \pi}{p_a}\, \frac{W_i}{1+\beta} = \frac{\beta\, \pi}{p_a}\, x_i.$$

Y las del bien contingente en b:

$$z_i = \frac{\beta\, (1-\pi)\, W_i}{(1+\beta)\, p_b} = \frac{\beta\, (1-\pi)}{p_b}\, \frac{W_i}{1+\beta} = \frac{\beta\, (1-\pi)}{p_b}\, x_i.$$

Como deseamos que se cumpla $x_i = y_i = z_i$, los precios tienen que satisfacer $p_a = \beta\, \pi$ y $p_b = \beta\, (1-\pi)$. Por lo que $x_1 = 20$ implica

$$W_1 = 20\, (1+\beta) = 20 + 20\, \beta = 20 + 20\, \beta\, \pi + 20\, \beta\, (1-\pi) = 20 + 20\, p_a + 20\, p_b.$$

Es decir, las dotaciones $e_1 = (20, 20, 20)$ dan lugar al nivel de riqueza que, a los precios anteriores, dará como demandas la asignación dada. Las correspondientes dotaciones del otro individuo deben ser $e_2 = (80, 80, 80)$. Con esto hemos mostrado que, con las dotaciones dadas, hay un equilibrio competitivo que da lugar a las asignaciones Pareto óptimas de que hemos partido.

2. Considerar una economía temporal de intercambio puro con incertidumbre. Hay un único bien de consumo y dos períodos $t \in \{0,1\}$. Sólamente hay incertidumbre en el segundo período, donde hay dos estados de la naturaleza, a y b, que tienen probabilidades respectivas π y $1-\pi$, donde $0<\pi<1$. Sean (x_i, y_i, z_i) el consumo del individuo i en el primer período, y su plan contingente de consumo en el segundo período en los estados a y b, respectivamente. Las funciones de utilidad son: $\mathscr{U}_1(x_1, y_1, z_1) = \log(x_1) + \frac{1}{4}\log(y_1) + \frac{3}{4}\log(z_1)$ y $\mathscr{U}_2(x_2, y_2, z_2) = \log(x_2) + \frac{3}{4}\log(y_2) + \frac{1}{4}\log(z_2)$. Hay dos activos, caracterizados por sus rendimientos en términos de unidad del bien en cada uno de los estados: $A_1 = (80, 20)$ y $A_2 = (20, 180)$. Las dotaciones iniciales del bien en $t=0$ de los individuos son $e_{10} = e_{20} = 50$. Las participaciones iniciales de los individuos en la propiedad de los activos son: $\beta_1 = (12/35, 22/35)$ y $\beta_2 = (23/35, 13/35)$, donde el componente $j \in \{1,2\}$ indica la participación en el activo j. Dado el precio del bien en $t=0$, p_0 (que podemos normalizar: $p_0 \equiv 1$), y los precios de los activos, q_1 y q_2, las variables de elección del individuo i son su demanda del bien en $t=0$, x_i, y sus demandas de participaciones de cada activo, $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2})$.

(i) Mostrar que elecciones $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2})$ por parte del individuo i implican consumos contingentes $y_i = 80\,\alpha_{i1} + 20\,\alpha_{i2}$ y $z_i = 20\,\alpha_{i1} + 180\,\alpha_{i2}$.

Solución: Como $A_1 = (80, 20)$, una demanda α_{i1} permite un consumo de $80\,\alpha_{i1}$ unidades del bien en a y de $20\,\alpha_{i1}$ unidades del bien en b. De la misma forma, como $A_2 = (20, 180)$, una demanda α_{i2} permite un consumo de $20\,\alpha_{i2}$ unidades del bien en a y de $180\,\alpha_{i2}$ unidades del bien en b. Sumando los consumos que resultan de ambos activos obtenemos las cantidades propuestas en el enunciado.

(ii) Formular el problema de elección óptima de las variables $(x_1, \alpha_{11}, \alpha_{12})$ por parte del individuo 1. Hallar las condiciones de primer orden de maximización, y mostrar que dan lugar a un sistema de ecuaciones cuya resolución no es nada trivial.

Solución: En términos de las variables de elección $(x_1, \alpha_{11}, \alpha_{12})$, la utilidad del individuo 1 es:

$$\mathscr{W}_1(x_1, \alpha_{11}, \alpha_{12}) = \log(x_1) + \frac{1}{4}\log(80\,\alpha_{11} + 20\,\alpha_{12}) + \frac{3}{4}\log(20\,\alpha_{11} + 180\,\alpha_{12}).$$

Impondremos, como anteriormente, la normalización $p_0 = 1$. Igualando las tasas marginales de substitución correspondientes a las variables $(x_1, \alpha_{11}, \alpha_{12})$ a los precios respectivos, obtenemos:

$$\mathrm{TMS}^1_{x_1,\alpha_{11}} = \frac{\partial \mathscr{W}_1/\partial \alpha_{11}}{\partial \mathscr{W}_1/\partial x_1} = \frac{20\,x_1}{80\,\alpha_{11} + 20\,\alpha_{12}} + \frac{15\,x_1}{20\,\alpha_{11} + 180\,\alpha_{12}} = q_1$$
$$\mathrm{TMS}^1_{x_1,\alpha_{12}} = \frac{\partial \mathscr{W}_1/\partial \alpha_{12}}{\partial \mathscr{W}_1/\partial x_1} = \frac{5\,x_1}{80\,\alpha_{11} + 20\,\alpha_{12}} + \frac{135\,x_1}{20\,\alpha_{11} + 180\,\alpha_{12}} = q_2$$

Las funciones de demanda del individuo 1 se derivan de la resolución de las dos ecuaciones anteriores junto con la ecuación presupuestaria:

$$x_1 + q_1\,\alpha_{11} + q_2\,\alpha_{12} = 50 + \frac{12}{35}\,q_1 + \frac{22}{35}\,q_2.$$

Se trata de un sistema de ecuaciones no lineales, y por tanto su resolución manual resulta complicada.

(iii) Considerar un modelo con mercados contingentes completos que se corresponda con el modelo con mercados financieros que estamos analizando. En particular, hay que hacer que las dotaciones de bienes contingentes de los individuos sean equivalentes a las que se derivan de las participaciones iniciales en la propiedad de los activos de los individuos. Hallar los precios,

(p_0, p_a, p_b) con $p_0 \equiv 1$, y asignación de equilibrio en el modelo con mercados contingentes completos.

Solución: Hallemos, en primer lugar, las dotaciones de ambos bienes contingentes que se derivan del modelo con mercados de activos. Para el individuo 1 tenemos:

$$\left(\frac{22}{35}, \frac{22}{35}\right) \begin{pmatrix} 80 & 20 \\ 20 & 180 \end{pmatrix} = (40, 120)$$

Consecuentemente, las dotaciones iniciales del individuo 2 deben ser $(60, 80)$, dado que hay $80+20 = 100$ unidades del bien en a, y $20+180 = 200$ unidades del bien en b. Usar matrices es sólamente una manera de expresar en forma compacta los cálculos necesarios, pero podemos realizar los cálculos sin ellas. Por ejemplo, como el individuo 1 tiene una participación $12/35$ sobre la propiedad del activo $A_1 = (80, 20)$, dispondrá de $(12/35)\,80$ unidades del bien en a y de $(12/35)\,20$ unidades del bien en b. A eso hay que añadirle las unidades de ambos bienes que se derivan de su cuota de $22/35$ de la propiedad del activo $A_2 = (20, 180)$.

Por tanto, deseamos derivar el equilibrio competitivo en un mercado con bienes contingentes completos cuando las dotaciones iniciales son $e_1 = (50, 40, 120)$ y $e_2 = (50, 60, 80)$.

Normalizamos $p_0 = 1$. Igualando a los precios respectivos las tasas marginales de substitución del individuo 1:

$$\frac{x_1}{4\,y_1} = p_a, \qquad \frac{3\,x_1}{4\,z_1} = p_b.$$

De donde las demandas de 1 son:

$$x_1 = \frac{W_1}{2}, \quad y_1 = \frac{W_1}{8\,p_a}, \quad z_1 = \frac{3\,W_1}{8\,p_b}.$$

Análogamente, las demandas de 2 son:

$$x_2 = \frac{W_2}{2}, \quad y_2 = \frac{3\,W_2}{8\,p_a}, \quad z_2 = \frac{W_2}{8\,p_b}.$$

Dadas las dotaciones iniciales, las riquezas respectivas son $W_1 = 50 + 40\,p_a + 120\,p_b$ y $W_2 = 50 + 60\,p_a + 80\,p_b$. El vaciado del mercado del bien en el período 0 da:

$$100 = x_1 + x_2 = \frac{1}{2}\,(100 + 100\,p_a + 200\,p_b) \quad \to \quad p_a + 2\,p_b = 1.$$

El vaciado del mercado del bien contingente en el estado a da:

$$100 = y_1 + y_2 = \frac{200 + 220\,p_a + 360\,p_b}{8\,p_a} \quad \to \quad 29\,p_a = 10 + 18\,p_b.$$

La solución del sistema de ecuaciones es $p_a = 1/2$ y $p_b = 1/4$, además de la normalización inicial $p_0 = 1$. Por tanto, la asignación de equilibrio es:

$$(x_1, y_1, z_1) = (50, 25, 150), \qquad (x_2, y_2, z_2) = (50, 75, 50).$$

(iv) Dados los precios de bienes contingentes hallados en el apartado anterior, escribir los precios de los activos (q_1, q_2) que corresponden a dichos precios. Mostrar que la asignación $(x_1, \alpha_{11}, \alpha_{12}) = (50, 3/28, 23/28)$ y $(x_2, \alpha_{21}, \alpha_{22}) = (50, 25/28, 5/28)$ corresponde a la asignación de equilibrio en el modelo con mercados contingentes, y que estos precios y asignación en el modelo con mercados financieros solucionan los problemas de maximización de los individuos y dan lugar a equilibrio en los mercados.

Solución: Los valores de los activos que corresponden a los precios en el modelo con mercados contingentes completos son:

$$\begin{aligned} q_1 &= 80\, p_a + 20\, p_b = 45 \\ q_2 &= 20\, p_a + 180\, p_b = 55 \end{aligned}$$

Unas demandas en el modelo con mercados financieros de $(x_1, \alpha_{11}, \alpha_{12}) = (50, 3/28, 23/28)$ dan lugar a unos consumos contingentes: $y_1 = 80\,(3/28) + 20\,(23/28) = 25$ y $z_1 = 20\,(3/28) + 180\,(23/28) = 150$. Para el individuo 2, las demandas $(x_2, \alpha_{21}, \alpha_{22}) = (50, 25/28, 5/28)$ dan lugar a unos consumos contingentes: $y_2 = 80\,(25/28) + 20\,(5/28) = 75$ y $z_1 = 20\,(25/28) + 180\,(5/28) = 50$. Podemos verificar que estos consumos contingentes corresponden a la asignación de equilibrio competitivo en el modelo con mercados contingentes completos.

Sólamente nos resta comprobar que, cuando los precios en el modelo con mercados financieros son $(p_0, q_1, q_2) = (1, 45, 55)$, las demandas óptimas del individuo son $(x_1, \alpha_{11}, \alpha_{12}) = (50, 3/28, 23/28)$ y $(x_2, \alpha_{21}, \alpha_{22}) = (50, 25/28, 5/28)$. Anteriormente hallamos que, en este modelo, las demandas óptimas del indivuduo 1 satisfacen las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathrm{TMS}^1_{x_1,\alpha_{11}} &= \frac{\partial \mathscr{W}_1/\partial \alpha_{11}}{\partial \mathscr{W}_1/\partial x_1} = \frac{20\, x_1}{80\,\alpha_{11} + 20\,\alpha_{12}} + \frac{15\, x_1}{20\,\alpha_{11} + 180\,\alpha_{12}} = q_1 \\ \mathrm{TMS}^1_{x_1,\alpha_{12}} &= \frac{\partial \mathscr{W}_1/\partial \alpha_{12}}{\partial \mathscr{W}_1/\partial x_1} = \frac{5\, x_1}{80\,\alpha_{11} + 20\,\alpha_{12}} + \frac{135\, x_1}{20\,\alpha_{11} + 180\,\alpha_{12}} = q_2 \end{aligned}$$

Más la ecuación presupuestaria:

$$x_1 + q_1\,\alpha_{11} + q_2\,\alpha_{12} = 50 + \frac{12}{35}\, q_1 + \frac{22}{35}\, q_2.$$

El lector interesado puede verificar que, substituyendo los valores dados más arriba, se cumplen todas las ecuaciones. Las ecuaciones correspondientes para el individuo 2 son:

$$\begin{aligned} \mathrm{TMS}^2_{x_2,\alpha_{21}} &= \frac{\partial \mathscr{W}_2/\partial \alpha_{21}}{\partial \mathscr{W}_2/\partial x_2} = \frac{60\, x_2}{80\,\alpha_{21} + 20\,\alpha_{22}} + \frac{5\, x_2}{20\,\alpha_{21} + 180\,\alpha_{22}} = q_1 \\ \mathrm{TMS}^2_{x_2,\alpha_{22}} &= \frac{\partial \mathscr{W}_2/\partial \alpha_{22}}{\partial \mathscr{W}_2/\partial x_2} = \frac{15\, x_2}{80\,\alpha_{21} + 20\,\alpha_{22}} + \frac{45\, x_2}{20\,\alpha_{21} + 180\,\alpha_{22}} = q_2 \end{aligned}$$

Más la ecuación presupuestaria:

$$x_2 + q_1\,\alpha_{21} + q_2\,\alpha_{22} = 50 + \frac{23}{35}\, q_1 + \frac{13}{35}\, q_2.$$

De nuevo, podemos verificar que los valores propuestos cumplen todas estas ecuaciones.