Instituto Tecnológico Autónomo de México
Maestría en Finanzas
Economía Financiera (Eco-44105), 2015
Solución lista de ejercicios 5

Ricard Torres

1. Dada $x_m > 0$ y $\alpha > 1$, la distribución de Pareto tiene función de densidad de probabilidad $f(x) = (\alpha\, x_m^\alpha)/x^{\alpha+1}$, para $x \geq x_m$ (y 0 para $x < x_m$). Por consiguiente, su función de distribución es $F(x) = 1 - (x_m/x)^\alpha$, para $x \geq x_m$ (y 0 para $x < x_m$).

(i) Mostrar que, si la variable aleatoria X tiene una distribución de Pareto con parámetros (x_m, α), entonces su valor esperado es $\mathbb{E}(X) = (\alpha\, x_m)/(\alpha - 1)$.

Solución:

$$\mathbb{E}(X) = \alpha\, x_m^\alpha \int_{x_m}^{\infty} x^{-\alpha}\, dx = \frac{\alpha x_m^\alpha}{\alpha - 1} \left[x^{-\alpha+1}\right]_{\infty}^{x_m} = \frac{\alpha x_m^\alpha}{\alpha - 1}\, x_m^{-\alpha+1} = \frac{\alpha x_m}{\alpha - 1}.$$

(ii) Suponer que X tiene una distribución de Pareto con parámetros (x_m, α), y que Y tiene una distribución de Pareto con parámetros (y_m, β), y suponer que $1 < \beta = \alpha$ y que $0 < y_m < x_m$. Mostrar que $X \succcurlyeq_1 Y$ (X domina a Y en el sentido de dominancia estocástica de primer orden).

Solución: Si $y_m < x \leq x_m$, entonces $F_X(x) = 0 < F_Y(x)$. Cuando $x > x_m$ tenemos:

$$F_X(x) < F_Y(x) \Leftrightarrow \left(\frac{y_m}{x}\right)^\alpha < \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha \Leftrightarrow y_m^\alpha < x_m^\alpha \Leftrightarrow y_m < x_m,$$

lo cual se cumple por hipótesis.

(iii) Suponer que X tiene una distribución de Pareto con parámetros (x_m, α), y que Y tiene una distribución de Pareto con parámetros (y_m, β), y suponer que $1 < \beta < \alpha$ y que $0 < y_m = x_m$. Mostrar que $Y \succcurlyeq_1 X$ (Y domina a X en el sentido de dominancia estocástica de primer orden).

Solución: Para $x > x_m$ tenemos:

$$F_X(x) > F_Y(x) \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha > 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\beta \Leftrightarrow \left(\frac{x_m}{x}\right)^\beta > \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha \Leftrightarrow x^{\alpha-\beta} > x_m^{\alpha-\beta} \Leftrightarrow x > x_m.$$

(iv) Suponer que X tiene una distribución de Pareto con parámetros (x_m, α), y que Y tiene una distribución de Pareto con parámetros (y_m, β). Suponer que $1 < \beta < \alpha$, pero $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$, lo que quiere decir que $(\alpha\, x_m)/(\alpha - 1) = (\beta\, y_m)/(\beta - 1)$, y por tanto $y_m < x_m$. Mostrar que $X \succcurlyeq_2 Y$ (X domina a Y en el sentido de dominancia estocástica de segundo orden).

Solución: Es mucho más sencillo mostrar eso a partir de las transformaciones cuantales que aplicar directamente el criterio de Rothschild-Stiglitz. Para hallar la transformación cuantal de X, invertimos la función de distribución:

$$s = F_X(x) = 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha \Leftrightarrow 1 - s = \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha \Leftrightarrow (1-s)^{1/\alpha} = \frac{x_m}{x} \Leftrightarrow Q_X(s) = x = x_m\,(1-s)^{-1/\alpha}.$$

Integrando en el intervalo $(0, t)$:

$$\int_0^t Q_X(s)\, ds = x_m \int_0^t (1-s)^{-1/\alpha}\, ds = \frac{\alpha x_m}{\alpha - 1} \left[(1-s)^{(\alpha-1)/\alpha}\right]_t^0 = \frac{\alpha x_m}{\alpha - 1} \left[1 - (1-t)^{(\alpha-1)/\alpha}\right].$$

Análogamente:

$$\int_0^t Q_Y(s)\, ds = \frac{\beta y_m}{\beta - 1} \left[1 - (1-t)^{(\beta-1)/\beta}\right].$$

Como las medias coinciden, tendremos:

$$X \succcurlyeq_2 Y \Leftrightarrow 1-(1-t)^{(\alpha-1)/\alpha} \geq 1-(1-t)^{(\beta-1)/\beta} \Leftrightarrow 1 \geq (1-t)^{(\alpha-1)/\alpha-(\beta-1)/\beta}.$$

Pero esto último es cierto (con desigualdad estricta), puesto que $1-t<1$ y $\alpha>\beta$ implica $(\alpha-1)/\alpha > (\beta-1)/\beta$.

2. Considerar dos distribuciones de riqueza, A y B, dadas por:

$$n_A = (79, 62, 111, 62, 62) \qquad y_A = (376, 429, 529, 618, 742)$$
$$n_B = (211, 56, 162, 134, 167, 235, 174, 167) \qquad y_B = (109, 146, 233, 348, 428, 464, 513, 745)$$

Hallar los vértices de la curva de Lorenz en ambos casos (es decir, los punto que interpolamos linealmente para hallar la curva de Lorenz). Mostrar que, para las coordenadas de población (las F_i) que corresponden a una u otra distribución la curva de Lorenz de A queda siempre por encima de la de B.
Solución: Los vértices de la curva de Lorenz vienen dados por los vectores (hemos usado `Matlab` para efectuar los cálculos):

$$\begin{aligned} F_A &= (0.00, 0.21, 0.38, 0.67, 0.84, 1.00) \\ S_A &= (0.00, 0.15, 0.28, 0.58, 0.77, 1.00) \\ F_B &= (0.00, 0.16, 0.20, 0.33, 0.43, 0.56, 0.74, 0.87, 1.00) \\ S_B &= (0.00, 0.05, 0.06, 0.14, 0.23, 0.37, 0.58, 0.76, 1.00) \end{aligned}$$

Las F_i relevantes son:

$$F = (0.16, 0.20, 0.21, 0.33, 0.38, 0.43, 0.56, 0.67, 0.74, 0.84, 0.87).$$

Para estas coordenadas, hallamos los valores de las curvas de Lorenz mediante interpolación lineal:

$$\begin{aligned} L_A &= (0.11, 0.14, 0.15, 0.24, 0.28, 0.34, 0.47, 0.58, 0.66, 0.77, 0.82) \\ L_B &= (0.05, 0.06, 0.07, 0.14, 0.18, 0.23, 0.37, 0.50, 0.58, 0.71, 0.76) \end{aligned}$$

Se puede apreciar que los valores son siempre superiores para la primera distribución.

3. Considerar la distribución de riqueza $n = (100, 100, 100)$ e $y = (200, 300, 400)$. Analizar cómo se compara con la distribución original, en el sentido de dominación de Lorenz, la nueva distribución que resulta de:

(i) Transferir 10 individuos de la categoría $y_3 = 400$ a la categoría $y_2 = 300$.

Solución: No son comparables. Por ejemplo, $L_A(0.48) = 0.36889 < 0.37303 = L_B(0.48)$, pero $L_A(0.78) = 0.70667 > 0.70337 = L_B(0.78)$.

(ii) Transferir 10 individuos de la categoría $y_1 = 200$ a la categoría $y_2 = 300$.

Solución: No son comparables. Por ejemplo, $L_A(0.48) = 0.36889 < 0.37582 = L_B(0.48)$, pero $L_A(0.18) = 0.12000 > 0.11868 = L_B(0.18)$.

(iii) Transferir 10 individuos de la categoría $y_1 = 200$ a la categoría $y_2 = 300$, y 10 individuos de la categoría $y_3 = 400$ a la categoría $y_2 = 300$.

Solución: Domina la segunda (podemos pasar de la 2a a la 1a mediante un "mean preserving spread").

(iv) Hacer que un individuo de la categoría $y_1 = 200$ dé una cantidad 10 a un individuo de la categoría $y_3 = 400$.

Solución: Domina la primera (es el resultado de una transferencia regresiva de Pigou-Dalton).

(v) Hacer que un individuo de la categoría $y_3 = 400$ dé una cantidad 10 a un individuo de la categoría $y_1 = 200$.

Solución: Domina la segunda (es el resultado de una transferencia progresiva de Pigou-Dalton).

Finalmente, mostrar que, si se dobla el número de individuos en la categoría media, n_2, y todo lo demás se deja igual, la curva de Lorenz resultante es estrictamente más equitativa que la inicial. Mostrar cómo eso se puede interpretar como un reescalamiento del número de individuos seguido de una transferencia de individuos de cada una de las categorías extremas a la categoría media de forma que la riqueza total no se altera (con el segundo cambio).

Solución: Dados $n = (100, 100, 100)$ e $y = (200, 300, 400)$, la curva de Lorenz no cambia si multiplicamos el vector de población por 4/3, con lo que ésta pasa a ser $n_A = (400/3, 400/3, 400/3) = (100 + (100/3), 100 + (100/3), 100 + (100/3))$, e $y_A = y$. Ahora realizamos una transferencia de 100/3 individuos de cada uno de los extremos hacia el centro de forma que la riqueza queda igual: $n_B = (100, 200, 100)$. Con eso, la distribución anterior es un "mean preserving spread" de la nueva, por lo que ésta última la domina en el sentido de Lorenz.