Instituto Tecnológico Autónomo de México
Maestría en Finanzas
Economía Financiera (Eco-44105), 2015
Solución lista de ejercicios 9

Ricard Torres

1. Consideremos una economía de intercambio puro con dos consumidores, 1 y 2, y dos bienes, a y b. Las funciones de utilidad de los consumidores son: $u_1(x_1, y_1) = \frac{1}{4}\log(x_1) + \frac{3}{4}\log(y_1)$ y $u_2(x_2, y_2) = \frac{3}{4}\log(x_2) + \frac{1}{4}\log(y_2)$. Las dotaciones iniciales de ambos bienes que tienen los consumidores son: $(e_1^1, e_2^1) = (120, 20)$ y $(e_1^2, e_2^2) = (40, 60)$.

(i) Calcular el conjunto de todos los puntos Pareto óptimos, y hacer un gráfico de dicha curva en la caja de Edgeworth.

Solución: La tasa marginal de substitución del individuo 1 es:

$$\mathrm{TMS}_1 = \frac{\partial u_1/\partial x_1}{\partial u_1/\partial y_1} = \frac{1/(4x_1)}{3/(4y_1)} = \frac{y_1}{3x_1}.$$

La tasa marginal de substitución del individuo 2 es:

$$\mathrm{TMS}_2 = \frac{\partial u_2/\partial x_2}{\partial u_2/\partial y_2} = \frac{3/(4x_2)}{1/(4y_2)} = \frac{3y_2}{x_2}.$$

Igualando y aplicando las restricciones de recursos:

$$\mathrm{TMS}_1 = \mathrm{TMS}_2 \quad \to \quad \frac{y_1}{3x_1} = \frac{3y_2}{x_2} = \frac{3\,(80 - y_1)}{160 - x_1}.$$

De donde:

$$y_1 = \frac{90\,x_1}{20 + x_1}.$$

Hemos representado las asignaciones Pareto óptimas en la figura 1.

(ii) Suponer que hay un mercado competitivo para cada uno de los bienes, con precios respectivos p_a y p_b. Hallar las funciones de demanda de los individuos (en función de los precios).

Solución: Igualamos la tasa marginal de substitución del individuo 1 a la relación de precios:

$$\mathrm{TMS}_1 = \frac{y_1}{3x_1} = \frac{p_a}{p_b} \quad \to \quad p_b y_1 = 3p_a x_1$$

Substituyendo en la restricción presupuestaria:

$$120p_a + 20p_b = p_a x_1 + p_b y_1 = p_a x_1 + 3p_a x_1 = 4p_a x_1$$

De donde despejamos la demanda del bien a:

$$x_1(p_a, p_b) = \frac{120p_a + 20p_b}{4p_a} = \frac{30p_a + 5p_b}{p_a}$$

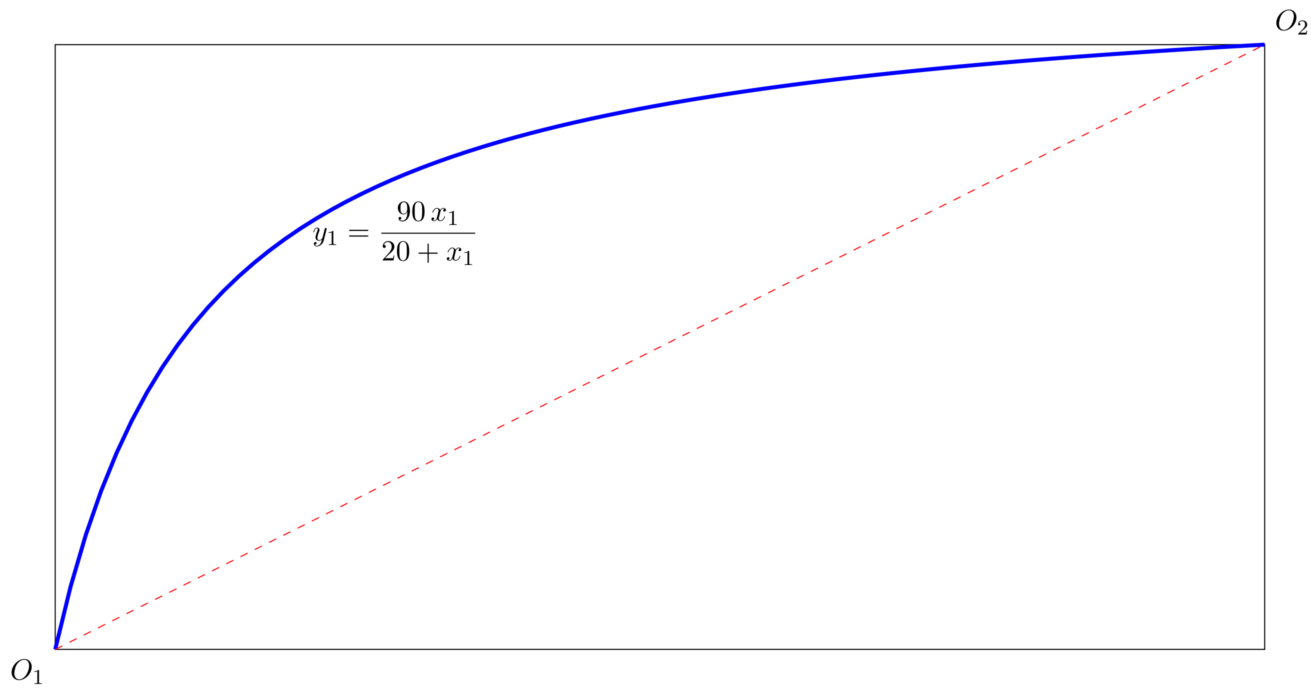

Figura 1: Asignaciones Pareto óptimas en el ejercicio 1.

Por tanto,

$$y_1(p_a,p_b) = \frac{90p_a + 15p_b}{p_b}.$$

Igualamos la tasa marginal de substitución del individuo 2 a la relación de precios:

$$\mathrm{TMS}_2 = \frac{3y_2}{x_2} = \frac{p_a}{p_b} \quad \to \quad p_a x_2 = 3p_b y_2$$

Substituyendo en la restricción presupuestaria:

$$40p_a + 60p_b = p_a x_2 + p_b y_2 = 3p_b y_2 + p_b y_2 = 4p_b y_2$$

De donde despejamos la demanda del bien b:

$$y_2(p_a,p_b) = \frac{40p_a + 60p_b}{4p_b} = \frac{10p_a + 15p_b}{p_b}$$

Por tanto,

$$x_2(p_a,p_b) = \frac{30p_a + 45p_b}{p_a}.$$

(iii) Aplicando las condiciones de vaciado de los mercados, hallar la relación de precios de equilibrio. Mostrar que se cumple la Ley de Walras: si los precios hacen que se igualen la oferta y la demanda en uno de los mercados, entonces también se deben igualar la oferta y la demanda en el otro mercado.

Solución: La condición de vaciado del mercado del bien a es:

$$120 + 40 = 160 = x_1(p_a,p_b) + x_2(p_a,p_b) = \frac{30p_a + 5p_b}{p_a} + \frac{30p_a + 45p_b}{p_a} = \frac{60p_a + 50p_b}{p_a}$$

De donde
$$160\,p_a = 60\,p_a + 50\,p_b \quad \to \quad p_b = 2\,p_a$$
Si normalizamos $p_a = 1$, entonces $p_b = 2$.

Según la Ley de Walras, la igualación de demanda y oferta en el mercado del bien b debería dar lugar a la misma relación de precios $p_a/p_b = 1/2$.
$$20 + 60 = 80 = y_1(p_a, p_b) + y_2(p_a, p_b) = \frac{90p_a + 15p_b}{p_b} + \frac{10p_a + 15p_b}{p_b} = \frac{100p_a + 30p_b}{p_b}$$
De donde
$$80\,p_b = 100\,p_a + 30\,p_b \quad \to \quad p_b = 2\,p_a$$
La misma relación de precios que hallamos antes.

(iv) Dada la relación de precios de equilibrio, hallar los consumos que cada individuo realiza de ambos bienes en dicho equilibrio. A continuación, verificar que la asignación correspondiente es un óptimo de Pareto, mostrando que está sobre la curva de contrato hallada anteriormente.

Solución: Substituímos los precios $p_a = 1$ y $p_b = 2$ en las funciones de demanda:
$$x_1 = \frac{30p_a + 5p_b}{p_a} = 40 \qquad y_1 = \frac{90p_a + 15p_b}{p_b} = 60$$
$$x_2 = \frac{30p_a + 45p_b}{p_a} = 120 \qquad y_2 = \frac{10p_a + 15p_b}{p_b} = 20$$
La curva de las asignaciones Pareto óptimas viene dada por:
$$y_1 = \frac{90x_1}{20 + x_1}$$
Podemos comprobar que, substituyendo $x_1 = 40$, efectivamente resulta en $y_1 = 60$. Como se cumplen las restricciones de recursos (que equivalen al vaciado de mercados), esto implica que la asignación de equilibrio es Pareto óptima.

(v) Dados los precios de equilibrio, calcular la riqueza inicial de cada individuo: ¿cuál de ellos tiene una mayor riqueza inicial?

Solución: Las riquezas iniciales de los individuos son el valor de sus dotaciones:
$$w_1 = 120p_a + 20p_b = 160, \quad w_2 = 40p_a + 60p_b = 160.$$

2. Consideremos una economía de intercambio puro con incertidumbre. Hay dos consumidores, 1 y 2, un único bien (que podemos interpretar como riqueza), y dos estados de la naturaleza, a y b. Sea π (con $0 < \pi < 1$) la probabilidad del estado a, que supondremos común a ambos individuos. Sean x_i e y_i los consumos del individuo i en los estados a y b, respectivamente. Las dotaciones totales de la economía en ambos estados son $e_a = 100$ y $e_b = 70$. Las funciones de utilidad de Bernoulli de los individuos son $u_1(w) = -e^{-w}$ y $u_2(w) = -e^{-2w}$, donde w es la riqueza. Por lo tanto, sus funciones de utilidad esperada son: $\mathcal{U}_1(x_1, y_1) = -\pi\, e^{-x_1} - (1-\pi)\, e^{-y_1}$ y $\mathcal{U}_2(x_2, y_2) = -\pi\, e^{-2x_2} - (1-\pi)\, e^{-2y_2}$.

(i) Mostrar que las funciones de utilidad de Bernoulli satisfacen, para $i \in \{1, 2\}$ y para toda $w \geq 0$, $u_i'(w) > 0$ y $u_i''(w) < 0$. Mostrar que los coeficientes de aversión absoluta al riesgo de ambos individuos son constantes, y que el individuo 2 es más averso al riesgo que 1.

Solución: Tenemos $u_1(w) = -e^{-w}$, por tanto $u_1'(w) = e^{-w} > 0$, para todo $w \geq 0$. Derivando una vez más: $u_1''(w) = -e^{-w} < 0$ para todo $w \geq 0$. El coeficiente de aversión absoluta al riesgo es:

$$A_1(w) = -\frac{u_1''(w)}{u_1'(w)} = \frac{e^{-w}}{e^{-w}} = 1.$$

Análogamente, $u_2(w) = -e^{-2w}$ implica $u_2'(w) = 2\,e^{-2w} > 0$, para todo $w \geq 0$. Derivando una vez más: $u_2''(w) = -4\,e^{-2w} < 0$ para todo $w \geq 0$. El coeficiente de aversión absoluta al riesgo es:

$$A_2(w) = -\frac{u_2''(w)}{u_2'(w)} = \frac{4\,e^{-w}}{2\,e^{-w}} = 2.$$

Como $A_2(w) > A_1(w)$ para todo $w > 0$, podemos afirmar que el individuo 2 es más averso al riesgo que 1.

(ii) Mostrar que cualquier asignación Pareto óptima satisface $2\,x_2 + y_1 = x_1 + 2\,y_2$. (*Nota:* tener en cuenta que $e^s\,e^t = e^{s+t}$.)

Solución: La tasa marginal de substitución del individuo 1 es:

$$\text{TMS}_1 = \frac{\partial \mathcal{U}_1/\partial x_1}{\partial \mathcal{U}_1/\partial y_1} = \frac{\pi\,e^{-x_1}}{(1-\pi)\,e^{-y_1}} = \frac{\pi\,e^{y_1}}{(1-\pi)\,e^{x_1}}.$$

La tasa marginal de substitución del individuo 2 es:

$$\text{TMS}_2 = \frac{\partial \mathcal{U}_2/\partial x_2}{\partial \mathcal{U}_2/\partial y_2} = \frac{2\,\pi\,e^{-2x_2}}{2\,(1-\pi)\,e^{-2y_2}} = \frac{\pi\,e^{2y_2}}{(1-\pi)\,e^{2x_2}}.$$

Igualando:

$$\text{TMS}_1 = \text{TMS}_2 \quad \to \quad \frac{\pi\,e^{y_1}}{(1-\pi)\,e^{x_1}} = \frac{\pi\,e^{2y_2}}{(1-\pi)\,e^{2x_2}}.$$

De donde:

$$\frac{e^{y_1}}{e^{x_1}} = \frac{e^{2y_2}}{e^{2x_2}} \quad \to \quad e^{2\,x_2+y_1} = e^{x_1+2\,y_2} \quad \to \quad 2\,x_2 + y_1 = x_1 + 2\,y_2.$$

(iii) Mostrar que las asignaciones Pareto óptimas (ie, aquellas que implican un reparto óptimo de riesgos) son aquellas que satisfacen $x_1 = 20 + y_1$, para $0 \leq y_1 \leq 70$, además de las restricciones de recursos. Dibujar dichas asignaciones en la caja de Edgeworth, y mostrar que se encuentran entre las rectas de asignaciones sin riesgo de ambos individuos.

Solución: Para hallar los óptimos de Pareto debemos usar las restricciones de factibilidad de las asignaciones. La primera, $x_1 + x_2 = 100$, implica $x_2 = 100 - x_1$; la segunda, $y_1 + y_2 = 70$, implica $y_2 = 70 - y_1$. Por tanto:

$$2\,(100 - x_1) + y_1 = x_1 + 2\,(70 - y_1) \quad \to \quad x_1 = 20 + y_1.$$

En este caso, es más conveniente expresar x_1 en función de y_1. Como $0 \leq y_1 \leq 70$, vemos que $y_1 = 0$ implica $x_1 = 20$; en el otro extremo, $y_1 = 70$ implica $x_1 = 90$. Como los óptimos de Pareto satisfacen la ecuación de una recta, dicha recta queda completamente definida por los dos puntos que hemos hallado: véase la representación gráfica en la Figura 2

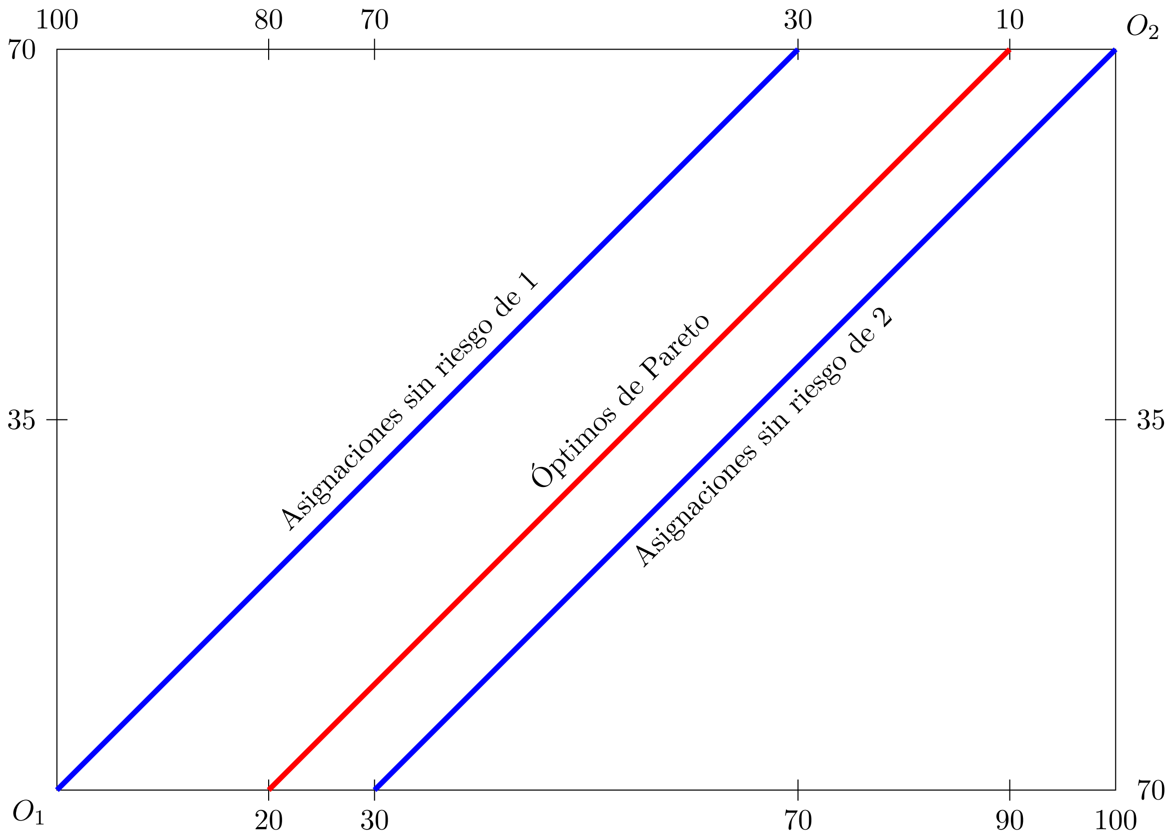

Figura 2: Asignaciones Pareto óptimas en el ejercicio 2-iii.

(iv) Consideremos ahora una economía en que el individuo 1 es el mismo, pero el individuo 2 tiene *menor* aversión al riesgo, dada por la función de utilidad de Bernoulli $u_2(w) = -e^{-w}$. Hallar la nueva curva de puntos Pareto óptimos, y mostrar que se halla más *lejos* de la recta de asignaciones sin riesgo de 2 que en el caso anterior. Interpretar.

Solución: Supongamos ahora que $u_2(w) = u_1(w) = -e^{-w}$. Entonces ambas tasas marginales de substitución son iguales, y la igualación de las mismas conduce a:

$$\mathrm{TMS}_1 = \mathrm{TMS}_2 \quad \rightarrow \quad \frac{e^{y_1}}{e^{x_1}} = \frac{e^{y_2}}{e^{x_2}} \quad \rightarrow \quad e^{x_2+y_1} = e^{x_1+y_2} \quad \rightarrow \quad x_2 + y_1 = x_1 + y_2.$$

Substituyendo las condiciones de factibilidad:

$$(100 - x_1) + y_1 = x_1 + (70 - y_1) \quad \rightarrow \quad x_1 = 15 + y_1.$$

Cuando $y_1 = 0$ tendremos $x_1 = 15$, y cuando $y_1 = 70$ tendremos $x_1 = 85$. En la representación gráfica podemos ver cómo los nuevos óptimos de Pareto se alejan más de la recta de asignaciones sin riesgo de 2: como la aversión al riesgo de 2 ha disminuído, el reparto óptimo de riesgos implica que 2 absorberá *más riesgo* que antes (y por tanto 1 absorberá menos): véase la representación gráfica en la Figura 3.

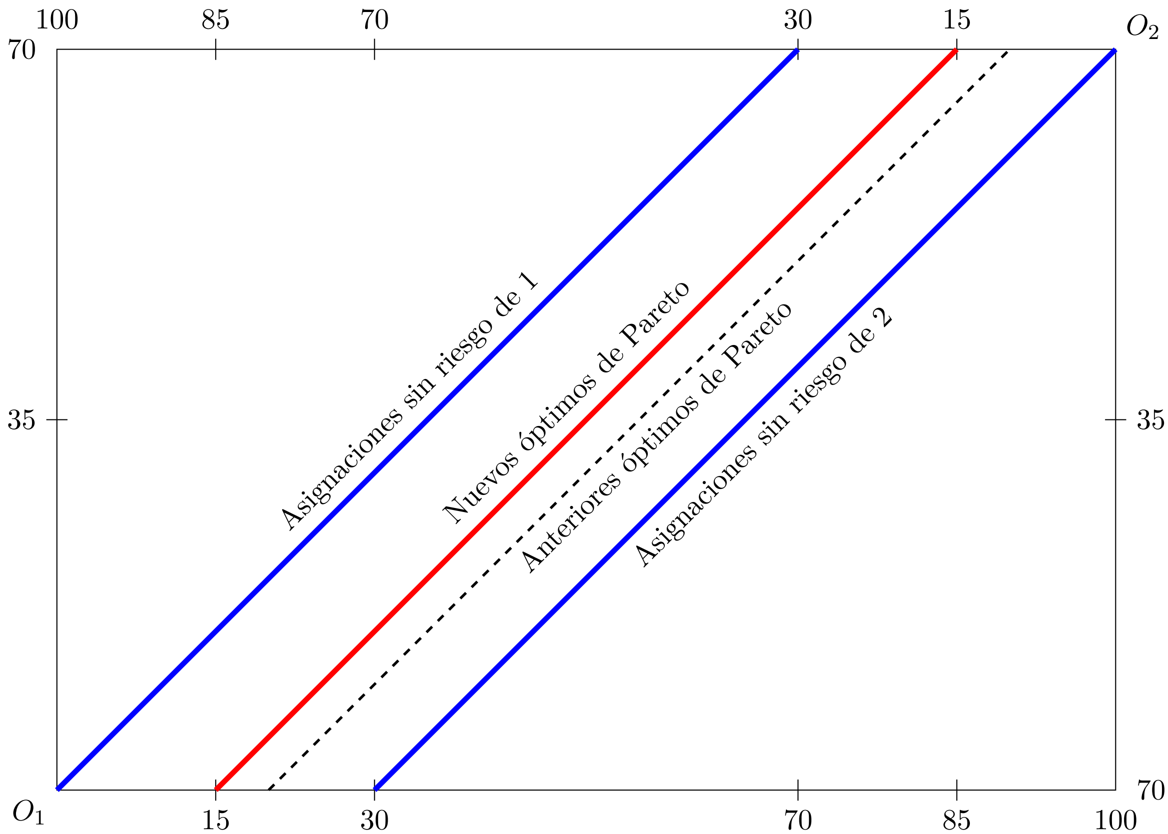

Figura 3: Asignaciones Pareto óptimas en el ejercicio 2-iv.