Instituto Tecnológico Autónomo de México
Maestría en Economía

# Microeconomía Aplicada II, 2015

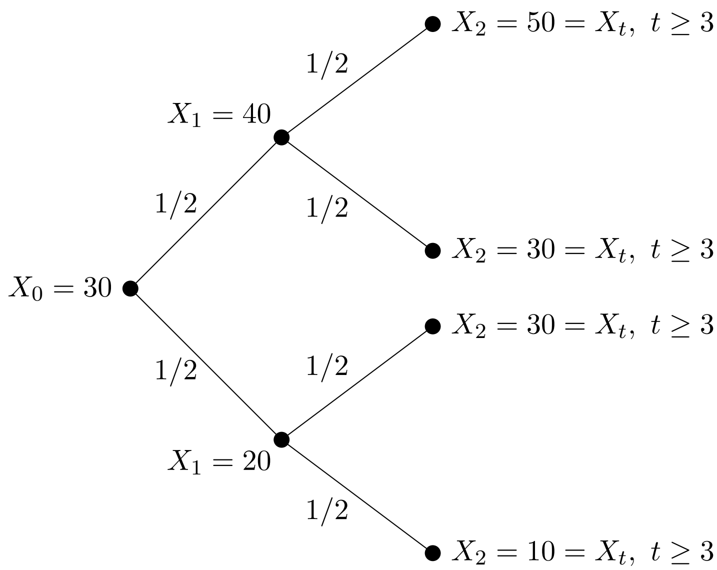
*Ejemplo de árbol de decisión*

Ricard Torres

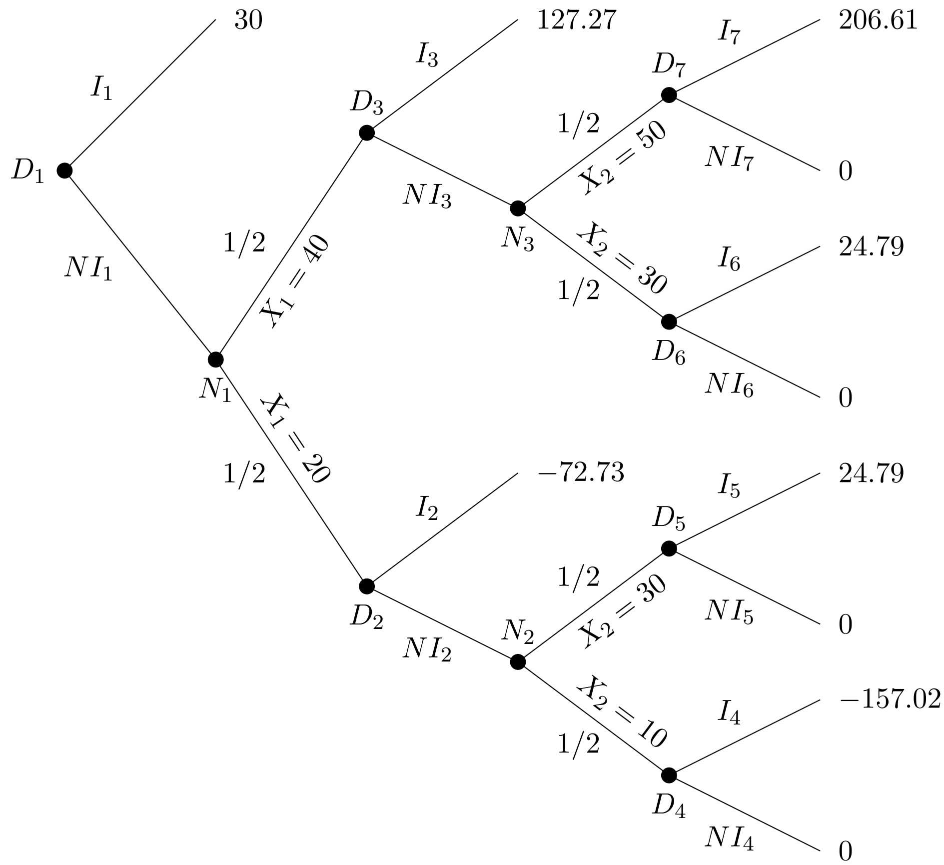
Una empresa está considerando un proyecto que requiere una inversión inicial de 300 (pongamos, millones de dólares), y tiene un rendimiento aleatorio. Denotamos los períodos mediante $t \geq 0$, siendo $t = 0$ el período inicial. Sea $X_t$ la variable aleatoria que denota el rendimiento del proyecto en el período $t \geq 0$. En cada período $t \geq 0$, la empresa observa el rendimiento corriente $X_t$, y a continuación tomará la decisión de si le interesa invertir en el presente período o no. La inversión es irreversible: una vez hecha la inversión, el costo de oportunidad del dinero invertido es cero. La decisión de la empresa consiste, por tanto, en si desea invertir y, en caso afirmativo, cuándo desea hacerlo.

Dada una tasa de interés constante y sin riesgo $r > 0$, el factor de descuento es $\delta = (1 + r)^{-1}$. Para homogeneizar las cantidades, las transformaremos todas en términos de valor presente en $t = 0$ usando ese factor de descuento. Para nuestro ejemplo, tomaremos $r = 0.10$, por lo que $\delta = 1/1.10$.

El proceso aleatorio que determina los rendimientos tiene una estructura de paseo aleatorio que (para simplificar) deviene constante a partir de $t = 2$: el valor inicial es $X_0 = 30$ (sin aleatoridad); $X_1$ toma los valores $(40, 20)$ con probabilidades $(1/2, 1/2)$; cuando $X_1 = 40$, $X_2$ toma los valores $(50, 30)$ con probabilidades (condicionales) $(1/2, 1/2)$, y cuando $X_1 = 20$, $X_2$ toma los valores $(30, 10)$ con probabilidades (condicionales) $(1/2, 1/2)$; finalmente, $X_t = X_2$ para $t \geq 3$. Podemos representar este proceso mediante el siguiente árbol de probabilidades.




En el momento de tomar la decisión de si conviene invertir, el individuo sólamente tiene incertidumbre con respecto al futuro, pero conoce toda la historia de rendimientos aleatorios hasta el presente. Por tanto, el árbol de decisión tiene "información perfecta", en el sentido que cada conjunto de información contiene un único nodo de decisión.




En el árbol podemos asociar un pago 0 a la decisión de no invertir en el período $t = 2$, puesto que, si el rendimiento de invertir inmediatamente fuera positivo, posponer la inversión sólamente resultaría en la pérdida de beneficios, debido al factor de descuento positivo.

Procediendo por inducción hacia atrás, hallamos que las decisiones óptimas en el período $t = 2$ son: $NI_4$, $I_5$, $I_6$ y $I_7$. Por ello, asociamos al nodo $N_2$ el pago 12.4, y al nodo $N_3$ el pago 115.70. Eso a su vez implica que las decisiones óptimas en el período $t = 1$ consisten en $NI_2$ y $I_3$, por lo cual asociaremos al nodo $N_1$ el pago 69.84. Esto finalmente nos lleva a concluir que la decisión óptima en $t = 0$ es $NI_1$. Por lo tanto, la estrategia óptima que resulta de inducción hacia atrás es: $(NI_1, NI_2, I_3, NI_4, I_5, I_6, I_7)$, con una ganancia asociada 69.84.

Este tipo de problemas que consisten en una inversión irreversible para la que podemos elegir el momento idóneo en que invertir, tienen características similares a un problema de decisión sobre cuándo ejercer una opción (cf, Dixit y Pindyck, "Investment Under Uncertainty," Princeton UP, 1994).