Instituto Tecnológico Autónomo de México
Maestría en Economía
Microeconomía Aplicada II (Eco-31112), 2015
Lista de ejercicios 7

Ricard Torres

1. Hemos visto en clase que el grado de concavidad de una función de utilidad de Bernoulli indica el grado de aversión al riesgo de las preferencias del individuo. Esto justifica las siguientes medidas de aversión al riesgo. Sea $u(x)$ una función de utilidad de Bernoulli que satisface: $\forall x > 0$, $u'(x) > 0$ y $u''(x) \leq 0$. Definimos los *coeficientes de aversión absoluta y relativa al riesgo* de esta función de utilidad como las funciones, definidas para $x > 0$:

$$C_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}; \qquad C_R(x) = -\frac{x\,u''(x)}{u'(x)}.$$

(ii) Para cada una de las siguientes funciones de utilidad de Bernoulli, mostrar que sus derivadas son como exigimos más arriba, hallar $C_A(x)$ y $C_R(x)$, y determinar si dichos coeficientes crecen o decrecen con la riqueza: $\log(x)$, $\sqrt{x}$, $x^{1/4}$, $-1/x$, $-e^{-3x}$, $-(1+x)^{-1}$, $x + \log(x)$.

(iii) Mostrar que tanto $C_A(x)$ como $C_R(x)$ son los mismos para cualquier transformación monotónica de $u(x)$ que preserve la propiedad de la utilidad esperada, es decir: $w(x) = a + b\,u(x)$, donde $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}_{++}$.

(iv) Sea $f : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ una función definida sobre el dominio de los $x > 0$ y que toma valores estrictamente positivos. Mostrar que su elasticidad es la pendiente usual cuando hacemos un gráfico logarítmico, es decir:

$$\varepsilon_f(x) = \frac{df(x)}{dx}\,\frac{x}{f(x)} = \frac{d\log[f(x)]}{d\log(x)}.$$

Para ello hacer un cambio de variables, definiendo $y = \log(x)$, de tal forma que $x = g(y) = e^y$, y aplicar la regla de la cadena de derivación.

(v) Mostrar que la función $C_R(x)$ es la elasticidad de la función $u'(x)$. Interpretar.

(vi) Mostrar que *ambos* coeficientes son constantes (ie, no dependen de x) sólamente cuando $u''(x) = 0$ para todo $x > 0$. ¿Qué funciones de utilidad cumplen esa propiedad? ¿Qué implica eso en relación a la aversión al riesgo?

2. Dado un número $a > 0$, $a \neq 1$, sea

$$u(x) = \frac{x^{1-a} - 1}{1 - a}$$

una función de utilidad de Bernoulli definida para todo nivel de riqueza $x > 0$.

(i) Mostrar que, cualquiera que sea a (dentro del rango definido más arriba), la utilidad marginal siempre es positiva: $u'(x) > 0$ para todo $x > 0$.

(ii) Mostrar que, cualquiera que sea a, se cumple $u''(x) < 0$ para todo $x > 0$.

(iii) Mostrar que, cualquiera que sea a, el coeficiente de aversión absoluta al riesgo es estrictamente decreciente y el de aversión relativa es constante.

(iv) Aplicando la regla de L'Hôpital (ie, aplicando los límites al cociente de derivadas), mostrar que $\lim_{a \to 1} u(x) = \log(x)$. (Usar la expresión: $x^{1-a} = e^{(1-a)\log(x)}$.) Mostrar que los coeficientes de aversión al riesgo de esta función tienen las propiedades descritas en el apartado anterior.