Instituto Tecnológico Autónomo de México
Maestría en Economía
Microeconomía Aplicada II (Eco-31112), 2015
Lista de ejercicios 8

Ricard Torres

1. Un individuo tiene unas preferencias sobre loterías que son representables mediante el valor esperado de una función de utilidad de Bernoulli $u(x)$ sobre riqueza. Tiene una riqueza inicial $W > 0$, de la cual puede invertir la proporción que desee en cado uno de los siguientes activos financieros. El primero es un activo sin riesgo que al cabo de un año le dará una tasa de rendimiento r_f sobre la inversión: por cada unidad monetaria invertida, le devolverán $1+r_f$ unidades (la unidad que invirtió más r_f unidades de rendimiento neto). El segundo activo tiene riesgo: al cabo de un año le dará un rendimiento r_a con probabilidad π, o bien un rendimiento r_b con probabilidad $1-\pi$. Suponemos que $0 < \pi < 1$, y que $0 < r_b < r_f < r_a$. Sea α ($0 \leq \alpha \leq 1$) la proporción de su riqueza que el individuo invierte en el activo con riesgo, y por tanto $1-\alpha$ la que invierte en el activo sin riesgo.

(i) Sea $R_i(\alpha)$, para $i \in \{a, b\}$, la riqueza final del individuo cuando invierte αW en el activo con riesgo y el rendimiento del mismo es r_i. Mostrar que, si $\alpha > 0$, $R_a(\alpha) > W\,(1+r_f) > R_b(\alpha)$, y que dichas relaciones son todas igualdades cuando $\alpha = 0$.

(ii) Formular el problema de inversión óptima del individuo; es decir, aquel problema que nos dirá qué proporción α maximiza su utilidad esperada. (*Observación:* Hay que tener en cuenta que $0 \leq \alpha \leq 1$.)

(iii) Sea $\mathcal{U}(\alpha)$ la utilidad esperada del individuo cuando invierte $\alpha\, W$ en el activo con riesgo. Mostrar, diferenciando dos veces, que esta función es estrictamente cóncava en α.

(iv) Suponer, de ahora en adelante, que el rendimiento esperado del activo con riesgo es superior al del activo sin riesgo, es decir, $\pi r_a + (1-\pi) r_b > r_f$. Mostrar que, en ese caso, la inversión óptima involucra $\alpha > 0$.

(v) Determinar la condición para que la inversión óptima del individuo consista en $\alpha = 1$.

(vi) Suponiendo que la solución del problema es interior (ie, la inversión óptima es $0 < \alpha < 1$), escribir la ecuación que caracteriza dicha solución. Esta ecuación define implícitamente el valor óptimo de α como función de la riqueza inicial W: $\alpha^*(W)$.

(vii) A partir de este momento, suponer que la solución es interior y que α corresponde al valor óptimo. Teniendo en cuenta que $\alpha = \alpha^*(W)$, mostrar que la derivada (total) de R_a con respecto a W puede ser expresada como:
$$\frac{dR_a}{dW} = 1 + (1-\alpha)\, r_f + \alpha\, r_a + W\,(r_a - r_f)\,\frac{d\alpha^*}{dW}.$$
Hallar una expresión análoga para la derivada total de R_b con respecto a W.

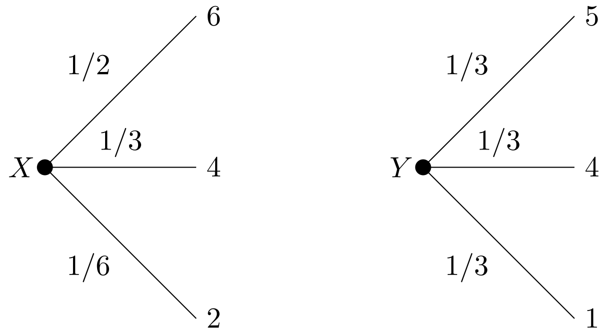
(viii) Razonar que la condición de primer order de maximización es una función constante de W, ya que α se ajusta al valor $\alpha^*(W)$ que hace que se cumpla esa ecuación. Por tanto, la derivada (total) de esta función con respecto a W será cero. Mostrar que esto implica:
$$\pi\,(r_a - r_f)\, u''(R_a)\,\frac{dR_a}{dW} - (1-\pi)\,(r_f - r_b)\, u''(R_b)\,\frac{dR_b}{dW} = 0.$$

(ix) Mostrar que podemos substituir la condición de primer orden en la anterior ecuación para obtener:
$$\frac{u''(R_a)}{u'(R_a)}\,\frac{dR_a}{dW} - \frac{u''(R_b)}{u'(R_b)}\,\frac{dR_b}{dW} = 0.$$

(x) Mostrar que, si el coeficiente de aversión absoluta al riesgo es decreciente, entonces la cantidad $\alpha^* W$ que el individuo invierte en el activo con riesgo es creciente en la riqueza inicial W. (*Tip:* La derivada de $\alpha^* W$ con respecto a W es igual a $\alpha + W\,(d\alpha^*/dW)$.) ¿Qué sucede cuando el coeficiente de aversión absoluta es constante?

(xi) Mostrar que, si el coeficiente de aversión relativa al riesgo es decreciente, entonces la proporción α^* que el individuo invierte en el activo con riesgo es creciente en la riqueza inicial W. ¿Qué sucede cuando el coeficiente de aversión relativa es constante?

2. Sean X e Y variables aleatorias que tienen las siguientes distribuciones respectivas:



Mostrar que existe una variable aleatoria $Z \leq 0$ tal que $X + Z$ tiene la misma distribución que Y. Concluir que X domina a Y en el sentido de dominancia estocástica de primer orden.

3. Sean X e Y variables aleatorias. Recordar que decimos que X domina a Y en el sentido de dominancia estocástica de primer orden (escrito $X \succcurlyeq_1 Y$), si $\mathbb{E}\{u(X)\} \geq \mathbb{E}\{u(Y)\}$ para toda utilidad de Bernoulli $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea débilmente creciente.

(i) Mostrar que, si $X \succcurlyeq_1 Y$, entonces para cualquier $z \in \mathbb{R}$ se cumple: $\mathbb{P}(X \geq z) \geq \mathbb{P}(Y \geq z)$. (*Tip*: considerar la función de utilidad $u(\cdot)$ que es igual a 0 para todo $x < z$, e igual a 1 para todo $x \geq z$.)

(ii) Mostrar que, si $X \succcurlyeq_1 Y$, entonces para cualquier $z \in \mathbb{R}$ se cumple: $\mathbb{P}(X > z) \geq \mathbb{P}(Y > z)$.

(iii) Teniendo en cuenta que $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, usar el anterior apartado para mostrar que $X \succcurlyeq_1 Y$ implica que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple $F_X(x) \leq F_Y(x)$. (*Tip*: para todo x, $\mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(X > x) = 1$.)

(iv) Suponer ahora que X e Y son variables aleatorias simples (toman un conjunto finito de valores distintos). Sea $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, con $n \geq 1$, el rango común de valores que toman ambas variables, ordenados de mayor a menor: $z_1 > z_2 > \cdots > z_n$. Sean $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ las probabilidades respectivas que X e Y ponen sobre estos n elementos (algunas de estas probabilidades pueden ser cero).

(v) Aplicando los resultados anteriores, mostrar que $X \succcurlyeq_1 Y$ implica las desigualdades en cadena:

$$p_1 \geq q_1, \quad p_1 + p_2 \geq q_1 + q_2, \quad p_1 + p_2 + p_3 \geq q_1 + q_2 + q_3, \quad \cdots$$

Ahora deseamos mostrar que las desigualdades en cadena anteriores implican que $X \succcurlyeq_1 Y$, es decir, que para cualquier función creciente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se cumple $\mathbb{E}\{f(X)\} \geq \mathbb{E}\{f(Y)\}$. Dada una función $f(\cdot)$ creciente cualquiera, escribamos $f_1 = f(z_1)$, $f_2 = f(z_2)$, …, $f_n = f(z_n)$. Podemos escribir $\mathbb{E}\{f(X)\}$ como: $\mathbb{E}\{f(X)\} = f_1\,p_1 + f_2\,p_2 + \cdots + f_n\,p_n = f_1\,p_1 + (-f_2\,p_1 + f_2\,p_1) + f_2\,p_2 + \cdots + f_n\,p_n = (f_1 - f_2)\,p_1 + f_2\,(p_1 + p_2) + f_3\,p_3 + \cdots + f_n\,p_n = (f_1 - f_2)\,p_1 + (f_2 - f_3)\,(p_1 + p_2) + f_3\,(p_1 + p_2 + p_3) + f_4\,p_4 + \cdots + f_n\,p_n$. Iterando el procedimiento, obtenemos finalmente: $\mathbb{E}\{f(X)\} = (f_1 - f_2)\,p_1 + (f_2 - f_3)\,(p_1 + p_2) + (f_3 - f_4)\,(p_1 + p_2 + p_3) + \cdots + (f_{n-1} - f_n)\,(p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}) + f_n\,(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)$.

(vi) A partir de esta expresión, mostrar que las desigualdades en cadena del apartado anterior implican que $\mathbb{E}\{f(X)\} \geq \mathbb{E}\{f(Y)\}$.