Aversión al riesgo y mercados de seguros

Ricard Torres

CIE — ITAM

Microeconomía Aplicada II, Verano-Otoño 2015

Índice

1. Mercados de seguros
   - Mercados completos y seguros
   - Independencia y "risk pooling"
2. Elección óptima de un seguro
   - Contratos de seguros
   - Prima actuarialmente justa
   - Decisión de cobertura
   - Elección óptima

Mercados completos y seguros

- En general, el seguro implica una transferencia de riqueza de determinados estados (en que no ocurre un siniestro) hacia otros estados (en que dicho siniestro ocurre).
- En una economía idealizada con mercados contingentes completos, los seguros constituyen una propiedad de las combinaciones de consumo óptimas.
- Ahora bien, en la economía real no hay mercados contingentes para muchos estados de la naturaleza y/o períodos futuros. Esto ha dado lugar al surgimiento de instituciones que permiten intercambiar riesgos entre los agentes económicos: mercados financieros (eg, futuros) y otras instituciones como las compañías de seguros.

Independencia y la ley de grandes números

- Hay otro motivo que justifica la existencia de compañías de seguros, y que está relacionado con la esencia misma del riesgo.
- Cuando muchos individuos tienen riesgos independientes entre sí, la ley de grandes números nos asegura que, para el conjunto de los individuos, las proporciones se corresponderán con las probabilidades individuales.
- Por independencia entendemos aquí la independencia estocástica, que significa que el hecho de que un siniestro haya tenido lugar para un individuo determinado no altera la probabilidad de que el siniestro ocurra para otro individuo cualquiera.

Risk Pooling. Un ejemplo

- Supongamos que la probabilidad de que durante un año haya un incendio en una casa en una localidad determinada es de un 1 por mil. Si en la localidad hay 10.000 casas y los eventos son independientes, deberíamos esperar que, en promedio, el número de incendios anuales se sitúe alrededor de 10.
- Esto causa que, cuando se agregan riesgos independientes (risk pooling), las incertidumbres individuales se transforman en magnitudes colectivas con un grado de incertidumbre que disminuye con el número de individuos. Esto es lo que otorga sentido económico a la actividad aseguradora.
- Cuando los riesgos no son independientes, las compañías de seguros pueden tener problemas. Posibles soluciones: instituciones públicas (e.g.: declaración de “zona de catástrofe”), o bien ampliar el ámbito geográfico (reaseguros).

Elección óptima de un seguro

- Consideremos el problema de compra de seguro de incendios por parte de un individuo averso al riesgo cuyas preferencias sobre loterías son representables mediante una utilidad esperada.
- Supondremos que la función de utilidad de Bernoulli del individuo es diferenciable dos veces con continuidad. Adicionalmente, la utilidad marginal es estrictamente positiva y estrictamente decreciente para todo nivel estrictamente positivo de riqueza.
- La riqueza total del individuo es M, y en caso de incendio su riqueza pasaría a ser R ($0 < R < M$), es decir, tendría una pérdida $M - R$.
- La probabilidad de que haya un siniestro durante un período determinado (eg, un año) es π ($0 < \pi < 1$).

Compensación

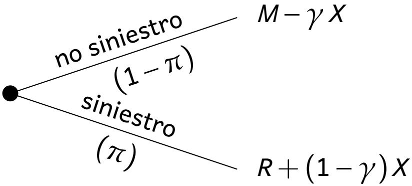
- La compensación que el individuo recibirá en caso de incendio, X (con $0 \leq X \leq M - R$), depende del contrato de seguro que el individuo adquiera.
- Sea γ (con $0 < \gamma < 1$) la prima de seguros. Esto quiere decir que el costo para el individuo de recibir una compensación X será de γX.
- Con un contrato caracterizado por (γ, X), el individuo paga una cantidad γX tanto si hay incendio como si no, y recibe una compensación X en caso de siniestro.

Prima actuarialmente justa

- Supondremos que la compañía de seguros es neutral hacia el riesgo: evalúa las loterías de acuerdo con su valor esperado.
- Despreciando los costos de gestión, un contrato (γ, X) supone a la compañía un ingreso γX y un costo igual al valor esperado πX.
- Decimos que la prima es actuarialmente justa cuando los ingresos compensan exactamente los costos: $\gamma = \pi$.
- En general, la condición de no negatividad de beneficios exige que se cumpla $\gamma \geq \pi$.

Cobertura completa y parcial

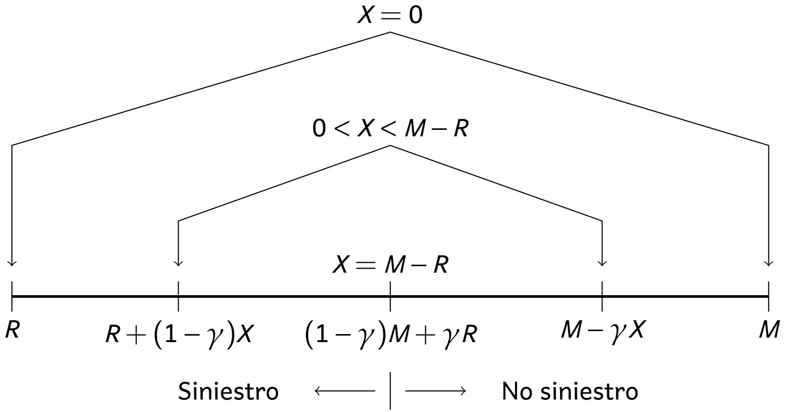
- Supongamos que el individuo adquiere un contrato de seguro (γ, X).



- Un caso extremo es $X=0$ (no hay cobertura), en el cual la riqueza del individuo en los dos estados es (M, R).
- El otro caso extremo es el de cobertura completa; cuando $X=M-R$, la riqueza en los dos estados es la misma:

$$M-\gamma(M-R)=R+(1-\gamma)(M-R)=(1-\gamma)M+\gamma R.$$

Efecto de variaciones en la cobertura X



☞ En general, la riqueza es siempre superior si no hay siniestro, y es igual si, y sólo si, hay cobertura completa:

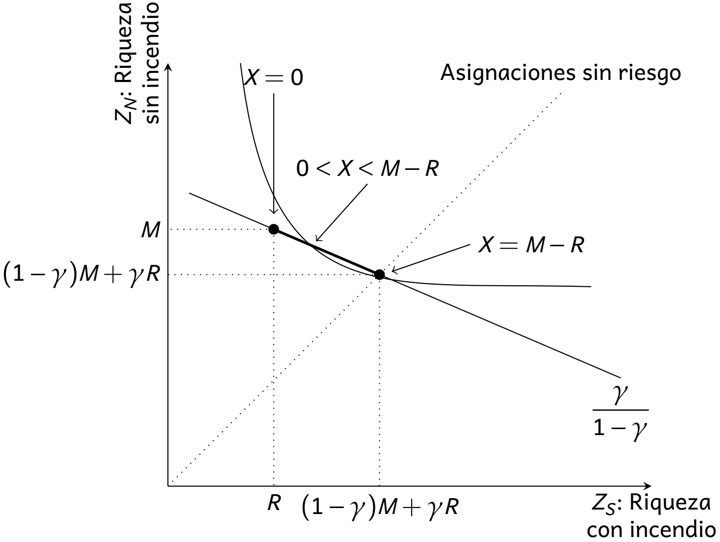
$$X \leq M - R \iff R + (1-\gamma)X \leq M - \gamma X.$$

Estados de la naturaleza y grado de cobertura

- Consideremos un contrato de seguros (γ, X), donde se cumple: $\gamma \geq \pi$, $0 \leq X \leq M - R$.
- Sea Z_S la riqueza cuando hay siniestro y Z_N la riqueza sin siniestro. Hemos visto que: $Z_S = R + (1-\gamma)X$, $Z_N = M - \gamma X$.
- Invirtiendo la primera relación obtenemos $X = (Z_S - R)/(1-\gamma)$, y a partir de esa expresión hallamos la relación entre Z_S y Z_N:

$$Z_N = M - \frac{\gamma}{1-\gamma}(Z_S - R).$$

- Concluyendo, cuando γ está fija, distintos grados de cobertura dan lugar a niveles de riqueza en ambos estados que se hallan sobre una recta con pendiente negativa igual a $\gamma/(1-\gamma)$.



- Cobertura parcial y completa con un contrato con prima γ.

☞ Notemos que, si $\gamma > \pi$, no hay tangencia para $X = M - R$.

El problema de elección óptima

- Supongamos que la prima γ está dada, pero el individuo puede elegir cualquier nivel de cobertura X que satisfaga $0 \leq X \leq M - R$.
- La elección óptima del individuo es la solución del siguiente problema de optimización:

$$\max_{X} \ \pi\, u[R + (1-\gamma)X] + (1-\pi)\, u[M - \gamma X]$$
$$\text{s.a.} \ 0 \leq X \leq M - R$$

- Ignoremos por el momento las restricciones suponiendo que el máximo es interior. Entonces la condición de primer orden es:

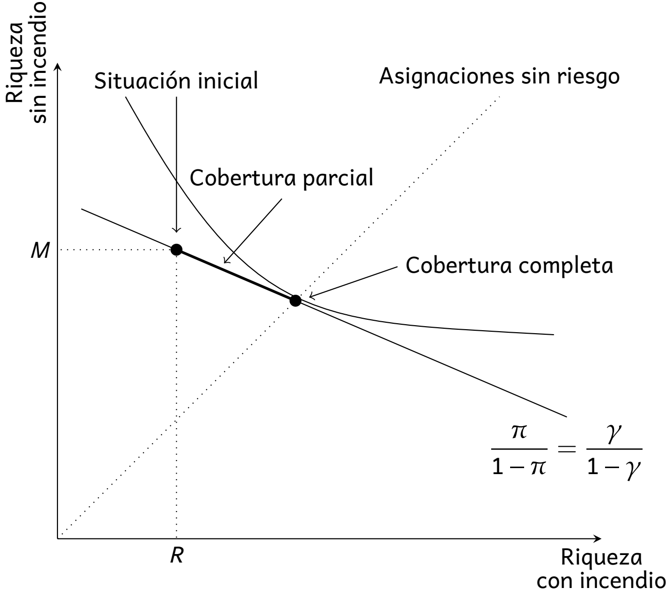
$$\frac{u'[R + (1-\gamma)X]}{u'[M - \gamma X]} = \frac{\gamma/(1-\gamma)}{\pi/(1-\pi)}$$

Elección con una prima actuarialmente justa

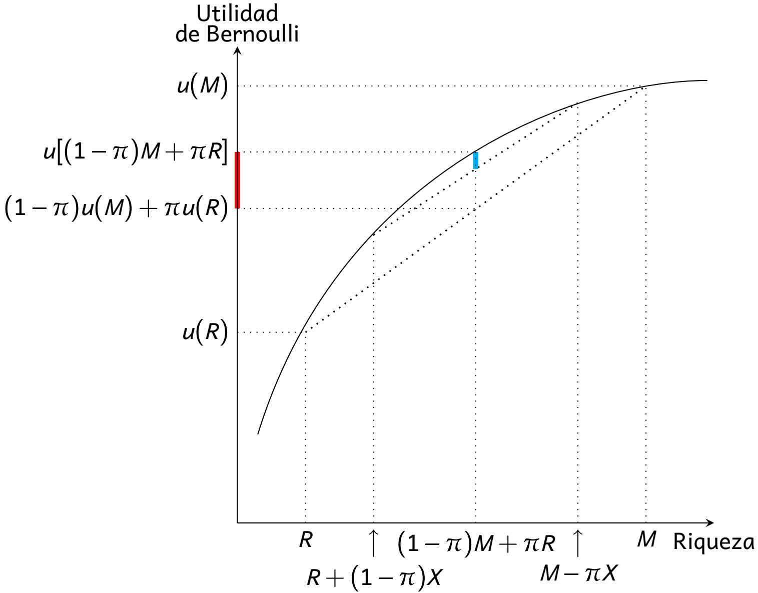
- En particular, si la prima es actuarialmente justa ($\gamma = \pi$), entonces el hecho que la utilidad marginal es estrictamente decreciente implica que dicha función no puede tomar el mismo valor para dos argumentos distintos, eso es:

$$R + (1 - \gamma) X = M - \gamma X \quad \longrightarrow \quad X = M - R$$

- En conclusión: si la prima es actuarialmente justa, el individuo deseará adquirir una cobertura total de su riesgo.
- Alternativamente, podemos ver el por qué de este resultado mediante una representación gráfica, ya sea en términos de estados de la naturaleza o de la función de utilidad de Bernoulli.



Cobertura parcial y completa con una prima actuarialmente justa ($\gamma = \pi$)



Utilidad de Bernoulli con una prima actuarialmente justa ($\gamma = \pi$)

Utilidades marginales y cobertura

- Consideremos el ratio de utilidades marginales en ambos estados:

$$\frac{u'[R+(1-\gamma)X]}{u'(M-\gamma X)}$$

- Notemos que, debido a que la utilidad marginal es estrictamente decreciente, este ratio es monótono en X. Dadas $0 < X_1 < X_2 < M - R$, tendremos:

$$\frac{u'(R)}{u'(M)} > \frac{u'[R+(1-\gamma)X_1]}{u'(M-\gamma X_1)} > \frac{u'[R+(1-\gamma)X_2]}{u'(M-\gamma X_2)} > 1 = \frac{u'[(1-\gamma)M+\gamma R]}{u'[(1-\gamma)M+\gamma R]}$$

Cálculo de soluciones en el caso general

- Aplicando la técnica de Kuhn-Tucker podemos encontrar la solución completa del problema de elección óptima.
- Tenemos dos restricciones, $X \geq 0$ y $X \leq M - R$, y por tanto tendremos los correspondientes multiplicadores.
- La aplicación de esta técnica de resolución la dejamos como ejercicio, y vamos a dar el resultado.
- Observaremos sólamente que, como la función objetivo es cóncava y las restricciones son lineales, las condiciones de primer orden caracterizan la solución global del problema de maximización.
- Recordemos que, por la condición de no negatividad de beneficios:

$$\gamma \geq \pi \iff \frac{\gamma}{1-\gamma} \geq \frac{\pi}{1-\pi} \iff \frac{\gamma/(1-\gamma)}{\pi/(1-\pi)} \geq 1$$

Solución completa del problema de optimización

1. Si se cumple
$$\frac{u'(R)}{u'(M)} \leq \frac{\gamma/(1-\gamma)}{\pi/(1-\pi)},$$
entonces hay solución de esquina en $X^* = 0$.
2. Si se cumple
$$\frac{\gamma/(1-\gamma)}{\pi/(1-\pi)} = 1 \iff \gamma = \pi,$$
entonces hay solución de esquina en $X^* = M - R$.
3. Finalmente, si se cumple
$$1 < \frac{\gamma/(1-\gamma)}{\pi/(1-\pi)} < \frac{u'(R)}{u'(M)},$$
entonces hay solución interior $0 < X^* < M - R$, caracterizada por
$$\frac{u'[R + (1-\gamma)X^*]}{u'(M - \gamma X^*)} = \frac{\gamma/(1-\gamma)}{\pi/(1-\pi)}.$$

Solución óptima: representación

$$\frac{\gamma/(1-\gamma)}{\pi/(1-\pi)}$$

$$\frac{u'[(1-\gamma)M+\gamma R]}{u'[(1-\gamma)M+\gamma R]}=1 \qquad \frac{u'[R+(1-\gamma)X]}{u'(M-\gamma X)} \qquad \frac{u'(R)}{u'(M)}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$X^{*}=M-R \qquad 0<X^{*}<M-R \qquad X^{*}=0$$