Instituto Tecnológico Autónomo de México
Maestría en Economía
Microeconomía Aplicada II (Eco-31112), 2015
Solución problema 1 lista de ejercicios 8

Ricard Torres

1. Un individuo tiene unas preferencias sobre loterías que son representables mediante el valor esperado de una función de utilidad de Bernoulli $u(x)$ sobre riqueza. Tiene una riqueza inicial $W > 0$, de la cual puede invertir la proporción que desee en cado uno de los siguientes activos financieros. El primero es un activo sin riesgo que al cabo de un año le dará una tasa de rendimiento r_f sobre la inversión: por cada unidad monetaria invertida, le devolverán $1 + r_f$ unidades (la unidad que invirtió más r_f unidades de rendimiento neto). El segundo activo tiene riesgo: al cabo de un año le dará un rendimiento r_a con probabilidad π, o bien un rendimiento r_b con probabilidad $1-\pi$. Suponemos que $0 < \pi < 1$, y que $0 < r_b < r_f < r_a$. Sea α ($0 \le \alpha \le 1$) la proporción de su riqueza que el individuo invierte en el activo con riesgo, y por tanto $1 - \alpha$ la que invierte en el activo sin riesgo.

(i) Sea $R_i(\alpha)$, para $i \in \{a, b\}$, la riqueza final del individuo cuando invierte αW en el activo con riesgo y el rendimiento del mismo es r_i. Mostrar que, si $\alpha > 0$, $R_a(\alpha) > W\,(1 + r_f) > R_b(\alpha)$, y que dichas relaciones son todas igualdades cuando $\alpha = 0$.

Solución: $R_a(\alpha) = (1-\alpha)W(1 + r_f) + \alpha W(1 + r_a) = W(1 + r_f) + \alpha W(r_a - r_f) > W(1 + r_f)$ si $\alpha > 0$.

$R_b(\alpha) = (1-\alpha)W(1 + r_f) + \alpha W(1 + r_b) = W(1 + r_f) - \alpha W(r_f - r_b) < W(1 + r_f)$ si $\alpha > 0$.

Las derivadas son:
$$\frac{\partial R_a}{\partial \alpha} = W\,(r_a - r_f), \qquad \frac{\partial R_b}{\partial \alpha} = -W\,(r_f - r_b).$$

(ii) Formular el problema de inversión óptima del individuo; es decir, aquel problema que nos dirá qué proporción α maximiza su utilidad esperada. (*Observación:* Hay que tener en cuenta que $0 \le \alpha \le 1$.)

Solución:
$$\max_{0 \le \alpha \le 1} \pi\, u[R_a(\alpha)] + (1-\pi)\, u[R_b(\alpha)].$$

(iii) Sea $\mathcal{U}(\alpha)$ la utilidad esperada del individuo cuando invierte αW en el activo con riesgo. Mostrar, diferenciando dos veces, que esta función es estrictamente cóncava en α.

Solución: $\mathcal{U}(\alpha) = \pi\, u[R_a(\alpha)] + (1-\pi)\, u[R_b(\alpha)]$.

$\mathcal{U}'(\alpha) = \pi\, u'(R_a)\, W\,(r_a - r_f) - (1-\pi)\, u'(R_b)\, W\,(r_f - r_b)$.

$\mathcal{U}''(\alpha) = \pi\, u''(R_a)\, W^2\,(r_a - r_f)^2 + (1-\pi)\, u''(R_b)\, W^2\,(r_f - r_b)^2 < 0$ para todo α.

(iv) Suponer, de ahora en adelante, que el rendimiento esperado del activo con riesgo es superior al del activo sin riesgo, es decir, $\pi r_a + (1-\pi) r_b > r_f$. Mostrar que, en ese caso, la inversión óptima involucra $\alpha > 0$.

Solución: Tenemos $R_a(0) = R_b(0) = W\,(1 + r_f)$. Por tanto:

$\mathcal{U}'(0) = W\, u'[W(1+r_f)]\,[\pi\,(r_a - r_f) - (1-\pi)\,(r_f - r_b)] = W\, u'[W(1+r_f)]\,[\pi\, r_a + (1-\pi)\, r_b - r_f]$.

Por lo cual $\pi\, r_a + (1-\pi)\, r_b > r_f$ implica $\mathcal{U}'(0) > 0$, lo cual a su vez implica que $\alpha^* > 0$.

(v) Determinar la condición para que la inversión óptima del individuo consista en $\alpha = 1$.

Solución: La condición es $\mathscr{U}'(1) \geq 0$, es decir: $\pi\,(r_a - r_f)\,u'[W(1+r_a)] \geq (1-\pi)\,(r_f - r_b)\,u'[W(1+r_b)]$.

(vi) Suponiendo que la solución del problema es interior (ie, la inversión óptima es $0 < \alpha < 1$), escribir la ecuación que caracteriza dicha solución. Esta ecuación define implícitamente el valor óptimo de α como función de la riqueza inicial W: $\alpha^*(W)$.

Solución:

$$\varphi(W) = \pi\,(r_a - r_f)\,u'[R_a(\alpha^*)] - (1-\pi)\,(r_f - r_b)\,u'[R_b(\alpha^*)] \equiv 0.$$

(vii) A partir de este momento, suponer que la solución es interior y que α corresponde al valor óptimo. Teniendo en cuenta que $\alpha = \alpha^*(W)$, mostrar que la derivada (total) de R_a con respecto a W puede ser expresada como:

$$\frac{dR_a}{dW} = 1 + (1-\alpha)\,r_f + \alpha\,r_a + W\,(r_a - r_f)\,\frac{d\alpha^*}{dW}.$$

Hallar una expresión análoga para la derivada total de R_b con respecto a W.

Solución:

$$\frac{dR_b}{dW} = 1 + (1-\alpha)\,r_f + \alpha\,r_b - W\,(r_f - r_b)\,\frac{d\alpha^*}{dW}.$$

(viii) Razonar que la condición de primer order de maximización es una función constante de W, ya que α se ajusta al valor $\alpha^*(W)$ que hace que se cumpla esa ecuación. Por tanto, la derivada (total) de esta función con respecto a W será cero. Mostrar que esto implica:

$$\pi\,(r_a - r_f)\,u''(R_a)\,\frac{dR_a}{dW} - (1-\pi)\,(r_f - r_b)\,u''(R_b)\,\frac{dR_b}{dW} = 0.$$

Solución: Inmediato.

(ix) Mostrar que podemos substituir la condición de primer orden en la anterior ecuación para obtener:

$$\frac{u''(R_a)}{u'(R_a)}\,\frac{dR_a}{dW} - \frac{u''(R_b)}{u'(R_b)}\,\frac{dR_b}{dW} = 0.$$

Solución: Es el resultado substituir:

$$\pi\,(r_a - r_f) = (1-\pi)\,(r_f - r_b)\,\frac{u'(R_a)}{u'(R_b)},$$

y simplificar.

(x) Mostrar que, si el coeficiente de aversión absoluta al riesgo es decreciente, entonces la cantidad $\alpha^* W$ que el individuo invierte en el activo con riesgo es creciente en la riqueza inicial W. (*Tip:* La derivada de $\alpha^* W$ con respecto a W es igual a $\alpha + W\,(d\alpha^*/dW)$.) ¿Qué sucede cuando el coeficiente de aversión absoluta es constante?

Solución: Para simplificar, escribamos $\alpha' = d\alpha^*/dW$. Tenemos: $0 < \alpha^* < 1 \Rightarrow R_a(\alpha^*) > R_b(\alpha^*) \Rightarrow C_A[R_a(\alpha^*)] \leq C_A[R_b(\alpha^*)]$. Por tanto:

$$1 \geq \frac{C_A[R_a(\alpha^*)]}{C_A[R_b(\alpha^*)]} = \frac{dR_b/dW}{dR_a/dW} = \frac{1 + (1-\alpha)r_f + \alpha r_b - W(r_f - r_b)\alpha'}{1 + (1-\alpha)r_f + \alpha r_a + W(r_a - r_f)\alpha'}.$$

Simplificando:

$$\alpha\, r_a + W\,(r_a - r_f)\,\alpha' \geq \alpha\, r_b - W\,(r_f - r_b)\,\alpha'.$$

De donde:

$$\alpha\,(r_a - r_b) + \alpha'\,W\,(r_a - r_b) \geq 0 \quad \rightarrow \quad (r_a - r_b)\,(\alpha + \alpha'\,W) \geq 0.$$

Como $r_a - r_b > 0$,

$$\frac{d(\alpha W)}{dW} = \alpha + \alpha' W \geq 0.$$

Cuando $C_A(x)$ es constante, la desigualdad es una igualdad, ie, la cantidad invertida en el activo con riesgo es constante (siempre que la solución sea interior).

(xi) Mostrar que, si el coeficiente de aversión relativa al riesgo es decreciente, entonces la proporción α^* que el individuo invierte en el activo con riesgo es creciente en la riqueza inicial W. ¿Qué sucede cuando el coeficiente de aversión relativa es constante?

Solución: A partir de

$$\frac{u''(R_a)}{u'(R_a)}\,\frac{dR_a}{dW} - \frac{u''(R_b)}{u'(R_b)}\,\frac{dR_b}{dW} = 0,$$

Obtenemos:

$$\frac{C_R(R_a)}{R_a}\,\frac{dR_a}{dW} - \frac{C_R(R_b)}{R_b}\,\frac{dR_b}{dW} = 0.$$

Por tanto, de $C_R[R_a(\alpha^*)] \leq C_R[R_b(\alpha^*)]$ deducimos:

$$1 \geq \frac{C_R[R_a(\alpha^*)]}{C_R[R_b(\alpha^*)]} = \frac{R_a}{R_b}\,\frac{dR_b/dW}{dR_a/dW} = \frac{[1+(1-\alpha)r_f + \alpha r_a]\,[1+(1-\alpha)r_f + \alpha r_b - W(r_f - r_b)\alpha']}{[1+(1-\alpha)r_f + \alpha r_b]\,[1+(1-\alpha)r_f + \alpha r_a + W(r_a - r_f)\alpha']}.$$

Hagamos $A \doteq 1+(1-\alpha)r_f + \alpha r_a$ y $B \doteq 1+(1-\alpha)r_f + \alpha r_b$. Entonces:

$$B\,[A + W\,(r_a - r_f)\,\alpha'] \geq A\,[B - W\,(r_f - r_b)\,\alpha'].$$

De donde:

$$[B\,(r_a - r_f) + A\,(r_f - r_b)]\,\alpha' \geq 0.$$

Como el término que multiplica a α' es estrictamente positivo, deducimos $\alpha' \geq 0$. Si $C_R(x)$ es constante, entonces la desigualdad es una igualdad, es decir $\alpha' = 0$, ie, $\alpha^*(W)$ es constante.